Hochschule RheinMain
Prof. Dr. D. Lehmann

SS 2023

3. Übungsblatt zur Vorlesung
Stochastik II

Aufgabe 1: Eine Zufallsvariable oder Zufallszahl X heisst Poisson verteilt mit Parameter λ, wenn X nur Werte in den natürlichen Zahlen annehmen kann, und das mit den folgenden Wahrscheinlichkeiten:

$$\mathsf{Prob}[\,X = k\,] \;=\; \frac{\lambda^k}{k!}\,e^{-\lambda} \;=:\; p_\lambda(k)$$

Zeigen Sie:

a) Der Erwartungswert von X ist dann gegeben durch

$$\mathsf{E}[X] \;=\; \sum_{k=1}^{\infty} k \times \mathsf{Prob}[X=k] \;=\; \sum_{k=1}^{\infty} k \times p_\lambda(k) \;\overset{\substack{\text{das ist}\\ \text{zu zeigen}}}{=}\; \lambda$$

b) Die Varianz ist gegeben durch

$$\mathsf{V}[X] \;=\; \mathsf{E}[X^2] - \mathsf{E}[X]^2 \;=\; \sum_{k=1}^{\infty} k^2 \times p_\lambda(k) \;-\; \lambda^2 \;\overset{\substack{\text{das ist}\\ \text{zu zeigen}}}{=}\; \lambda\;.$$

Aufgabe 2: Es seien X und Y zwei unabhängige Poisson-verteilte Zufallsvariablen. X sei Poisson-verteilt mit Parameter λ und Y sei Poisson-verteilt mit Parameter μ. Beweisen Sie:

a) Es gilt

$$\mathsf{Prob}\big[\,X + Y \;=\; n\,\big] \;=\; \frac{(\lambda+\mu)^n}{n!}\,e^{-(\lambda+\mu)}$$

Das heisst, $X+Y$ ist ebenfalls Poisson-verteilt, mit Parameter $\lambda+\mu$.

b) Folgern Sie mit Induktion: Sind $X_1, X_2, \cdots, X_n$ unabhängige, identisch Poisson-verteilte Zufallsvariablen mit Parameter $\lambda = 1$, dann ist

$$S_n \;:=\; X_1 + X_2 + \cdots + X_n$$

ebenfalls Poisson-verteilt, mit Parameter $\lambda = n$.

..bitte wenden

Aufgabe 3 (Stirlingsche Formel): Die Stirlingsche Formel ist eine Approximation für Fakultäten für grosse n und lautet:

$$n! \;\approx\; \sqrt{2\pi n}\,\left(\frac{n}{e}\right)^n$$

oder genauer

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{\sqrt{2\pi n}\,\left(\frac{n}{e}\right)^n} \;=\; 1$$

Man kann sie relativ einfach aus dem zentralen Grenzwertsatz ableiten: Betrachten Sie dazu die Summe $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ von mit Parameter $\lambda = 1$ Poisson-verteilten Zufallszahlen wie in Aufgabe 2b. Definieren Sie dann die standardisierte Grösse

$$Z_n \;:=\; \frac{S_n \,-\, \mathsf{E}[S_n]}{\sqrt{\mathsf{V}[S_n]}} \;=\; \frac{S_n \,-\, n}{\sqrt{n}}$$

und wenden Sie den zentralen Grenzwertsatz auf die Grösse

$$\mathsf{E}\big[\max(Z_n, 0)\big] \tag{1}$$

an. Das heisst, berechnen Sie den Erwartungswert in (1)

(i) für festes n direkt mit Hilfe der Poisson-Verteilung, indem Sie den Erwartungswert als eine unendliche Reihe schreiben (die sich dann sehr stark vereinfachen lässt)

(ii) im Limes $n \to \infty$, indem Sie den zentralen Grenzwertsatz anwenden und den Erwartungswert als ein Integral mit der Standard-Normalverteilung schreiben.

Aus der Gleichheit von (i) und (ii) im Limes $n \to \infty$ folgt dann nach etwas Umstellen die Stirlingsche Formel.