Hochschule RheinMain
Prof. Dr. D. Lehmann SS 2023

2. Übungsblatt zur Vorlesung
Stochastik II

Aufgabe 1) Im folgenden meint 'R-Skript' das Skript Grundlagen der Datenanalyse mit R auf der Vorlesungshomepage unter

http://hsrm-mathematik.de/SS2023/semester4/Stochastik2/R1-UniGiessen-GerritEichner.pdf

a) Lesen Sie sich in dem R-Skript die drei Seiten 87-89 durch, das ist das Kapitel 5: Wahrscheinlichkeitsverteilungen und Pseudo-Zufallszahlen. Sie finden dort eine sehr übersichtliche und kompakte Darstellung der vier R-Funktionen rVert(), dVert(), pVert() und qVert() und eine Liste der in R eingebauten Verteilungen Vert. Schauen Sie sich ebenfalls die Tabelle mit den Statistik-Funktionen auf Seite 22 an.

b) Erzeugen Sie einen Vektor $\vec{x} \in \mathbb{R}^{1001}$, der 1001 auf dem Intervall $[0, 1]$ gleichverteilte Zufallszahlen enthällt. Bestimmen Sie das Maximum $\max_i\{x_i\}$ und das Minimum $\min_i\{x_i\}$. Für welche Indices $i \in \{1, 2, ..., 1001\}$ wird das Maximum und Minimum angenommen?

c) Berechnen Sie den Mittelwert, die Varianz und die Standardabweichung der Zufallszahlen aus (b). Bestimmen Sie das 1%-Quantil, das 99%-Quantil, das erste und das dritte Quartil und den Median

(i) mit Hilfe der `quantile()`-Funktion

(ii) mit Hilfe des `sort()`-Befehls.

d) Plotten Sie die Zufallszahlen aus (b). Versuchen Sie, auf der vertikalen Achse das Intervall $[-2, 2]$ als Wertebereich zu nehmen, wie bekommt man das hin?

Aufgabe 2) Die Poisson-Verteilung: Laden Sie sich von der Vorlesungshomepage die slides 'Die Poisson-Verteilung und Radioaktiver Zerfall' herunter und lesen Sie diese 5 slides. Führen Sie dann folgende Berechnungen durch, indem Sie die in R eingebauten Wahrscheinlichkeitsverteilungen benutzen:

a) Legen Sie in R die Zahlen

$$N = 2.53 \times 10^{18}, \quad \text{und} \quad p = \frac{12}{N} \approx 4.74 \times 10^{-18}$$

an.

b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten

$$B_{N,p}(k) \;=\; \binom{N}{k}\, p^k (1-p)^{N-k} \quad \text{für} \quad k \in \{0,1,2,...,24,25\}$$

und plotten Sie das Resultat.

c) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten

$$P_\mu(k) \;=\; \frac{\mu^k}{k!}\, e^{-\mu} \qquad \text{für } \; \mu = 12 \; \text{ und } \quad k \in \{0,1,2,...,24,25\}$$

und plotten Sie das Resultat.

d) Testen Sie die Wahrscheinlichkeiten aus (b) und (c) auf Gleichheit

(i) mit Hilfe von "`==`"

(ii) mit Hilfe der `all.equal()`-Funktion.

e) Überprüfen Sie, dass die in R eingebauten Funktionen für die Binomial- und die Poisson-Verteilung (welche sind das genau?) tatsächlich mit den analytischen Formeln auf der rechten Seite in (b) und (c) übereinstimmen.

Aufgabe 3) In Aufgabe 2 haben wir gesehen, dass die Binomialverteilung gegen eine Poisson-Verteilung konvergiert, wenn N sehr gross ist und p sehr klein ist so dass $N \cdot p$ konstant bleibt für $N \to \infty$. Wenn man das p nicht klein macht, sondern etwa auf $p = 0.1$ oder etwa $p = 0.6$ fixiert und dann N sehr gross macht, lässt sich die Binomialverteilung durch eine Normalverteilung approximieren. Definieren wir $\mu_N := Np$ und $\sigma_N := \sqrt{Np(1-p)}$, dann gilt

$$B_{N,p}(k) \;\approx\; \varphi\Big(\tfrac{k-\mu_N}{\sigma_N}\Big) \tag{1}$$

Dabei ist $\varphi(x)$ die Dichte der Standard-Normalverteilung, gegeben durch

$$\varphi(x) \;:=\; \tfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{x^2}{2}}$$

Die Approximation (1) wollen wir uns hier anschauen:

a) Wählen Sie $p = 0.1$. Plotten Sie, in einem Diagramm, die linke und die rechte Seite von (1) als Funktion von k. Generieren Sie insgesamt 4 Diagramme für die 4 Werte von $N \in \{25, 50, 100, 200\}$.

b) Wählen Sie jetzt etwa $p = 0.6$ und machen Sie dann noch einmal genau dasselbe wie in Teil (a).