Hochschule RheinMain SS 2023
Prof. Dr. D. Lehmann

10. Übungsblatt zur Vorlesung
Stochastik II

Aufgabe 1) Im week8a.pdf hatten wir auf den letzten beiden Seiten in dem Beispiel 2 unabhängige, mit Parameter λ Poisson-verteilte Zufallszahlen $x_1, \cdots, x_n$ betrachtet und den Maximum Likelihood Schätzer für das λ hergeleitet, der war gegeben durch

$$\hat{\lambda}_{\rm ML}(x_1, \cdots, x_n) = \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \tag{1}$$

Zeigen Sie mit Hilfe der Cramer-Rao Abschätzung: Der Schätzer (1) ist effizient in der Menge aller erwartungstreuen Schätzer. Das heisst, das $\hat{\lambda}_{\rm ML}$ hat minimale Varianz in der Menge aller erwartungstreuen Schätzer $\tilde{\lambda}$ mit $\mathsf{E}[\tilde{\lambda}] = \lambda$. Gehen Sie dazu folgendermassen vor:

a) Zeigen Sie: $\mathsf{V}[\hat{\lambda}_{\rm ML}] = \frac{\lambda}{n}$.

b) Berechnen Sie die Fisher-Informationsmatrix $I(\lambda)$. Das ist in diesem Fall einfach eine Zahl, also eine 1×1 Matrix.

c) Schreiben Sie die Cramer-Rao Abschätzung für diesen Fall hin.

Aufgabe 2) Wir betrachten die Maximum Likelihood Schätzer (oder die erwartungstreue Version davon) für den Mittelwert μ und die Varianz σ^2 von normalverteilten Zufallszahlen $x_1, \cdots, x_n$ gegeben durch

$$\hat{\mu}(x_1, \cdots, x_n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \tag{2}$$

$$\widehat{s^2}(x_1, \cdots, x_n) = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2 \tag{3}$$

In der Vorlesung haben wir gezeigt (auf den letzten beiden Seiten vom week10b):

a) $\hat{\mu}$ ist normalverteilt mit Mittelwert μ und Varianz $\frac{\sigma^2}{n}$.

b) $\widehat{s^2}$ ist im wesentlichen χ^2_{n-1}-verteilt. Genauer:

$$\mathsf{Prob}\Big[\, \widehat{s^2} \in [z, z+dz) \,\Big] = \tfrac{n-1}{\sigma^2} \times p_{\chi^2_{n-1}}\big(\tfrac{n-1}{\sigma^2}\, z\big)\, dz$$

wobei das $p_{\chi^2_{n-1}}$ die Dichte der χ^2-Verteilung mit $n-1$ Freiheitsgraden ist.

Verifizieren Sie die Aussagen (a) und (b) durch eine geeignete R-Simulation.