Hochschule RheinMain
Prof. Dr. D. Lehmann SS 2023

1. Übungsblatt zur Vorlesung
Stochastik II

Aufgabe 1) Legen Sie folgende Vektoren in R an:

$$\begin{aligned}
\vec{v}_1 &= (1.1, 3.3, 4.56, -7.77) \ \in \ \mathbb{R}^4 \\
\vec{v}_2 &= (1, 2, 3, ..., 99, 100) \ \in \ \mathbb{R}^{100} \\
\vec{v}_3 &= (2, 4, 6, ..., 198, 200) \ \in \ \mathbb{R}^{100} \\
\vec{v}_4 &= (-1, 1, 3, ..., 195, 197) \ \in \ \mathbb{R}^{100} \\
\vec{v}_5 &= (1, 1, 1, ..., 1, 1) \ \in \ \mathbb{R}^{100} \\
\vec{v}_6 &= (1, 2, 3, 4, 1, 2, 3, 4, 1, 2, 3, 4, ..., 1, 2, 3, 4) \ \in \ \mathbb{R}^{100} \\
\vec{v}_7 &= (500, 495, 490, ..., 15, 10, 5) \ \in \ \mathbb{R}^{100} \\
\vec{v}_8 &= (1, 4, 9, 16, ..., 99^2, 100^2) \ \in \ \mathbb{R}^{100} \\
\vec{v}_9 &= (1, 1/4, 1/9, 1/16, ..., 1/99^2, 1/100^2) \ \in \ \mathbb{R}^{100} \\
\vec{x} &\in \mathbb{R}^{100} \quad \text{mit } x_1 = 0, \ \ x_{100} = 2\pi \quad \text{und } \ x_i - x_{i-1} = \text{const}
\end{aligned}$$

Aufgabe 2) Informieren Sie sich über die Funktionsweise des `cumsum()`-Befehls. Führen Sie dann folgende Berechnungen in R durch:

a) Zeigen Sie numerisch in R, dass die Folge der Partialsummen der alternierenden harmonischen Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{1}{k}$$

gegen $\ln 2$ konvergiert. Benutzen Sie dazu die `cumsum()`-Funktion und plotten Sie die Folge der Partialsummen $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ für $n = 1, 2, 3, ..., 999, 1000$.

b) Überprüfen Sie numerisch in R die Formel

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

Benutzen Sie dazu die `cumsum()`-Funktion und plotten Sie die Folge der Partialsummen mit Hilfe des `plot()`-Befehls. Tragen Sie in diesen plot ebenfalls die horizontale Gerade $y = \pi^2/6$ ein. Benutzen Sie dazu etwa die `abline()`-Funktion oder den `point()`-Befehl.

..bitte wenden

Aufgabe 3) Legen Sie die folgenden Matrizen in R an:

a)

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 & 8 \\ 10 & 12 & 14 & 16 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 16 & 8 \\ 14 & 6 \\ 12 & 4 \\ 10 & 2 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} -2.2 & 3.3 & 1.1 \\ 4.56 & -7.89 & 1.23 \\ 800 & 400 & 200 \end{pmatrix}$$

b)

$$B_1 = \begin{pmatrix} 100 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 99 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{100\times 100}, \qquad B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 2 & 2 & \cdots & 2 \\ \vdots & & & \vdots \\ 100 & 100 & \cdots & 100 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{100\times 100}$$

c)

$$C_1 = \left(\tfrac{1}{i+j}\right)_{i,j\in\{1,2,\ldots,10\}} \in \mathbb{R}^{10\times 10}, \quad C_2 = \left(\sin[2\pi ij/10]\right)_{i,j\in\{1,2,\ldots,10\}} \in \mathbb{R}^{10\times 10}$$

Aufgabe 4) Mit der Syntax

```
x = rnorm(n)
```

können Sie in R n standard-normalverteilte Zufallszahlen erzeugen und in dem Vektor $x \in \mathbb{R}^n$ abspeichern.

a) Legen Sie die Variable $n = 1000$ in R an. Erzeugen Sie dann n^2 standard-normalverteilte Zufallszahlen und speichern Sie sie in dem Vektor $x \in \mathbb{R}^{n^2}$.

b) Schreiben Sie die n^2 Zufallszahlen aus Teil (a) in eine $n \times n$ Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Die genaue Anordnung, etwa zeilen- oder spaltenweises Auffüllen der Matrix A, können Sie selber festlegen.

c) Berechnen Sie das Matrixprodukt $A^T A =: B$ und speichern Sie es in einer Matrix B.

d) Berechnen und plotten Sie die Eigenwerte von B.