Hochschule RheinMain SS 2023
Prof. Dr. D. Lehmann

Probe-Klausur zur Vorlesung
Stochastik II

Nachname:	
Vorname:	
Matrikelnummer:	
Note:	

Aufgabe:	1	2	3	4	5	6	7	8	Summe:
Punkte:	10	15	15	10	10	15	15	10	100
erreicht:									

Bevor Sie anfangen: Bitte geben Sie Ihre elektronischen Kommunikationsgeräte vorne ab. Wenn während der Klausur etwa ein Mobil-Telefon benutzt wird, muss die Klausur als **nicht bestanden** gewertet werden.

Hilfsmittel Theorie-Teil (Aufg. 1-4, 50 Punkte): 1 beidseitig beschriebenes DIN A4 Blatt, eine Formelsammlung und ein einfacher Taschenrechner. Die Zeit, die Sie für den Theorie-Teil verwenden möchten, können Sie selber festlegen. Bevor Sie mit dem Programmier-Teil beginnen, **müssen** Sie den Theorie-Teil abgegeben haben.

Hilfsmittel Programmier-Teil (Aufg. 5-8, 50 Punkte): Alle Hilfsmittel zugelassen. Sie bekommen einen USB-Stick, der am Ende der Klausur eingesammelt wird. Speichern Sie bitte Ihren R-Code unter

`Nachname-Vorname.R`

auf diesem Stick.

Theorie-Teil:

1.Aufgabe (10 Punkte): Es sei x eine auf dem Intervall $[0, 1]$ gleichverteilte Zufallszahl.

a) Berechnen Sie den Erwartungswert $\mathsf{E}[\,x\,]$

b) Berechnen Sie die Varianz $\mathsf{V}[\,x\,]$

2.Aufgabe (15 Punkte): Berechnen Sie die folgenden Integrale analytisch mit Bleistift und Papier. Sie können dazu alle Resultate und Theoreme aus der Vorlesung benutzen.

a) $\int_{-\infty}^{\infty} x\, e^{-\frac{(x-5)^2}{6}}\, dx$

b) $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} (x+y+z)^2\, e^{-\frac{x^2+y^2+z^2}{2}}\, \frac{dx\,dy\,dz}{(2\pi)^{3/2}}$

c) $\int_{-1}^{2} e^{-2x^2}\, dx$

Drücken Sie das Resultat von Teil (c) durch die $N(x)$-Funktion aus, gegeben durch

$$N(x) \;=\; \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{y^2}{2}}\,\frac{dy}{\sqrt{2\pi}}\;.$$

3.Aufgabe (15 Punkte): Zufallszahlen $\{x_i\}_{i=1}^{n}$ heissen exponential-verteilt mit Parameter $\lambda > 0$, wenn für alle $x \geq 0$

$$\mathsf{Prob}\big[\,x_i \in [x, x+dx)\,\big] \;=\; \lambda\, e^{-\lambda x}\, dx$$

gilt und die Wahrscheinlichkeit für negative Zahlen 0 ist, also $\mathsf{Prob}[\,x_i \in [x, x+dx)\,] \;=\; 0$ falls $x < 0$.

a) Zeigen Sie, dass der Maximum Likelihood Schätzer für λ gegeben ist durch

$$\hat{\lambda}_{\mathrm{ML}}(x_1, ..., x_n) \;=\; \frac{1}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i}$$

b) Wenn Sie überprüfen müssten, ob dieser Schätzer erwartungstreu ist, müssten Sie überprüfen, ob die Gleichung

$$\mathsf{E}[\,\hat{\lambda}_{\mathrm{ML}}\,] \;\stackrel{?}{=}\; \lambda \tag{1}$$

erfüllt ist. Wie ist das $\mathsf{E}[\,\cdot\,]$ auf der linken Seite von (1) genau zu berechnen? Geben Sie eine explizite Summe oder ein explizites Integral an. Sie müssen diese Summe oder dieses Integral dann nicht weiter ausrechnen.

4.Aufgabe (10 Punkte): Es seien $\phi_1, \phi_2, \cdots, \phi_n$ standard-normalverteilte Zufallszahlen und

$$X_n \;:=\; \phi_1^2\,\phi_2^2\,\cdots\,\phi_n^2 \;=\; \prod_{j=1}^{n} \phi_j^2$$

Berechnen Sie die Varianz $\mathsf{V}[\,X_n\,]$.

Programmier-Teil:

5.Aufgabe (10 Punkte): Die Dichte $p_\lambda(x)$ für die Exponentialverteilung ist gegeben durch

$$p_\lambda(x) \;:=\; \begin{cases} \lambda\, e^{-\lambda x} & \text{falls } x \geq 0\,, \\ 0 & \text{falls } x < 0\,. \end{cases}$$

Die Exponentialverteilung gehört zu den in R vorimplementierten W'keitsverteilungen.

a) Erzeugen Sie $N = 10000$ mit $\lambda = 0.5$ exponentialverteilte Zufallszahlen und stellen Sie sie in einem Histogramm dar.

b) Wählen Sie die Skalierung des Histogrammes so, dass die Werte auf der $y-$Achse mit der W'keitsdichte (1) vergleichbar sind, und plotten Sie ebenfalls die W'keitsdichte, in rot, in dasselbe Histogramm.

c) Es gibt die R-Funktion `pexp()` . Geben Sie den exakten analytischen Ausdruck für `pexp()` an und verifizieren Sie durch einen geeigneten Plot, dass dieser analytische Ausdruck tatsächlich mit `pexp()` übereinstimmt.

6.Aufgabe (15 Punkte): Berechnen Sie numerisch mit Hilfe einer Monte Carlo Simulation den Wert von folgenden Integralen:

a) $\int_{-1}^{2} e^{-2x^2}\, dx$, indem Sie normalverteilte Zufallszahlen benutzen

b) $\int_{-1}^{2} e^{-2x^2}\, dx$, indem Sie auf dem Intervall $[-1, 2]$ gleichverteilte Zufallszahlen benutzen

c) $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} (x+y+z)^2\, e^{-\frac{x^2+y^2+z^2}{2}}\, \frac{dx\,dy\,dz}{(2\pi)^{3/2}}$

7.Aufgabe (15 Punkte): Führen Sie die folgenden Berechnungen in R durch:

a) Erzeugen Sie $N = 10000$ Zufallsvektoren

$$x \;=\; (x_1, \cdots, x_{10}) \;\in\; \mathbb{R}^{n=10}$$

wobei die x_i unabhängige, normalverteilte Zufallszahlen sind mit Mittelwert $\mu = 20$ und Varianz $\sigma^2 = 16$. Speichern Sie Ihre insgesamt $N \times n$ Zufallszahlen dann in einer Matrix $X \in \mathbb{R}^{N\times n}$ mit $n = 10$ und $N = 10000$.

b) Der Maximum-Likelihood-Schätzer für den Mittelwert μ ist gegeben durch

$$\hat{\mu}(x_1, \cdots, x_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i \qquad (2)$$

Berechnen Sie das $\hat{\mu}$ für die N Zufallsvektoren aus (a) und speichern Sie die Werte in dem Vektor `hmu`.

c) In der Vorlesung haben wir gezeigt: Der Maximum-Likelihood-Schätzer (2) ist normalverteilt mit Mittelwert μ und Varianz $\frac{\sigma^2}{n}$. Überprüfen Sie diese Aussage numerisch, indem Sie ein Histogramm für die $\hat{\mu}$'s aus (b) machen und in dieses Histogramm die Dichte der entsprechenden Normalverteilung mit reinplotten. Wählen Sie die Skalierung des Histogramms so, dass die Werte mit der W'keitsdichte vergleichbar sind.

8.Aufgabe (10 Punkte): Führen Sie die folgenden Berechnungen in R durch:

a) Erzeugen Sie $n = 1001$ auf dem Intervall $[0, 1000]$ gleichverteilte Zufallszahlen $\{x_i\}_{i=1}^n$ und speichern Sie sie in dem Vektor `x`.

b) Berechnen Sie den Mittelwert und die Standardabweichung der $\{x_i\}_{i=1}^n$.

c) Geben Sie den Median und das dritte Quartil an.

d) Berechnen Sie das 10%-Quantil und das 99%-Quantil der $\{x_i\}_{i=1}^n$.