Die Poissonverteilung

und

Radioaktiver Zerfall

Die Poisson-Verteilung und Radioaktiver Zerfall

Beispiel Radioaktiver Zerfall: Der Zerfall von radioaktiven Atomen ist nicht deterministisch, sondern zufaellig: Betrachtet man ein einzelnes Atom, so laesst sich nicht vorhersagen, wann dieses Atom zerfaellt. Man kann nur eine Wahrscheinlichkeit p dafuer angeben, dass dieses Atom in der naechsten Zeiteinheit, sagen wir eine Sekunde, zerfaellt oder nicht.

Die spezifische Aktivitaet von Uran238 betraegt

12 Zerfaelle pro Sekunde pro Milligramm .

Diese Aussage bedeutet genau genommen folgendes: Es sei N die Anzahl der Atome in 1 Milligramm Uran238. Dann ist die Anzahl X der Atome, die in der naechsten Sekunde zerfallen, Binomial-verteilt mit Wahrscheinlichkeit p, und fuer den Erwartungswert von X gilt:

$$E[X] = N\,p = 12\ .$$

Die Poisson-Verteilung und Radioaktiver Zerfall

Die Wahrscheinlichkeit p, dass ein einzelnes Atom innerhalb der naechsten Sekunde zerfaellt, ist also

$$p \;=\; \frac{12}{N}$$

Uran238 hat das Atomgewicht 238u, 1Mol = 6.022 10^{23} Atome haben also das Gewicht von 238 Gramm, also enthaelt 1 Milligramm Uran238

$$N \;=\; \frac{6,022\times 10^{23}}{238\times 10^{3}} \;=\; 2,53\times 10^{18}$$

Atome. Wenn man jetzt also etwa die Wahrscheinlichkeit berechnen moechte, dass in 1 Milligramm Uran innerhalb der naechsten Sekunde genau k Atome zerfallen, so muss man

$$P(\{X=k\}) \;=\; B_{N,p}(k) \;=\; \binom{N}{k} p^k (1-p)^{N-k}$$

berechnen mit N = 2,53 10^{18} und p = 12/N = 4,74 10^{-18}. Das ist numerisch schwierig. Deshalb schreibt man

Die Poisson-Verteilung und Radioaktiver Zerfall

$$B_{N,p}(k) \;=\; \binom{N}{k} p^k (1-p)^{N-k} \;=\; \binom{N}{k}\Big(\frac{Np}{N}\Big)^k \Big(1-\frac{Np}{N}\Big)^{N-k}$$

$$=\; \binom{N}{k}\Big(\frac{12}{N}\Big)^k \Big(1-\frac{12}{N}\Big)^{N-k}$$

und betrachtet dann den Limes N nach unendlich. Es gilt der folgende

Satz: Fuer festes k ϵ IN_0 und μ ϵ IR^+ gilt:

$$\lim_{N\to\infty} \binom{N}{k}\Big(\frac{\mu}{N}\Big)^k \Big(1-\frac{\mu}{N}\Big)^{N-k} \;=\; \frac{\mu^k}{k!}\, e^{-\mu}$$

Definition: Eine Zufallsvariable X heisst Poisson-Verteilt mit Parameter μ ϵ IR^+ genau dann, wenn

$$P(\{X=k\}) \;=\; \frac{\mu^k}{k!}\, e^{-\mu}$$

Die Poisson-Verteilung und Radioaktiver Zerfall

Beweis Satz: Wir haben:

$$
\begin{aligned}
&\binom{N}{k}\left(\frac{\mu}{N}\right)^k\left(1-\frac{\mu}{N}\right)^{N-k} \\
&= \quad \frac{N(N-1)(N-2)\cdots(N-(k-1))}{k!} \times \frac{\mu^k}{N^k} \times \frac{\left(1-\frac{\mu}{N}\right)^N}{\left(1-\frac{\mu}{N}\right)^k} \\
&= \quad \frac{\mu^k}{k!} \times \frac{N(N-1)(N-2)\cdots(N-(k-1))}{\underbrace{N\cdot N\cdots N}_{\text{k Faktoren}}} \times \frac{1}{\left(1-\frac{\mu}{N}\right)^k} \times \left(1-\frac{\mu}{N}\right)^N \\
&= \quad \frac{\mu^k}{k!} \times \underbrace{1\cdot\left(1-\frac{1}{N}\right)\cdot\left(1-\frac{2}{N}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{N}\right)}_{\to 1} \times \underbrace{\frac{1}{\left(1-\frac{\mu}{N}\right)^k}}_{\to 1} \times \underbrace{\left(1-\frac{\mu}{N}\right)^N}_{\to e^{-\mu}} \\
&\overset{N\to\infty}{\to} \quad \frac{\mu^k}{k!} \times e^{-\mu}
\end{aligned}
$$

$\blacksquare$

Die Poisson-Verteilung und Radioaktiver Zerfall

Satz: Die Zufallsvariable X sei Poisson-verteilt mit Parameter $\mu \in \mathrm{IR}^+$.
Dann gilt:

$$E[X] = \mu \qquad \text{und} \qquad V[X] = \mu$$

Beweis: Kann man etwa zeigen mit Hilfe der Formeln

$$\begin{aligned} k\mu^k &= \left(x\frac{d}{dx}\right) x^k\Big|_{x=\mu} \\ k^2\mu^k &= \left(x\frac{d}{dx}\right)^2 x^k\Big|_{x=\mu} \end{aligned}$$