Hochschule RheinMain SS 2023
Prof. Dr. D. Lehmann

Lösungen zum 9. Übungsblatt
Stochastik II

Aufgabe 1) Der Erwartungswert von $\hat{\lambda}_{\mathrm{ML}}$ ist durch folgendes Integral gegeben:

$$\begin{aligned}
\mathsf{E}\big[\,\hat{\lambda}_{\mathrm{ML}}(x_1,...,x_n)\,\big] &= \int_0^\infty \int_0^\infty \cdots \int_0^\infty \hat{\lambda}_{\mathrm{ML}}(x_1,...,x_n) \prod_{i=1}^n \lambda\, e^{-\lambda x_i}\, dx_i \\
&= \int_0^\infty \int_0^\infty \cdots \int_0^\infty \frac{1}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i}\ \lambda^n\ e^{-\lambda \sum_{i=1}^n x_i}\ d^n x \ \stackrel{?}{=}\ \lambda
\end{aligned}$$

Mit der Formel aus (i) erhalten wir

$$\begin{aligned}
\mathsf{E}\big[\,\hat{\lambda}_{\mathrm{ML}}(x_1,...,x_n)\,\big] &= \int_0^\infty \frac{1}{\frac{1}{n}\,y}\ \lambda^n\ e^{-\lambda y}\ \frac{y^{n-1}}{(n-1)!}\, dy \\
&= \frac{n\lambda^n}{(n-1)!} \int_0^\infty y^{n-2}\, e^{-\lambda y}\, dy \\
&\stackrel{x=\lambda y}{=} \frac{n\lambda}{(n-1)!} \int_0^\infty x^{n-2}\, e^{-x}\, dx \\
&\stackrel{(ii)}{=} \frac{n\lambda}{(n-1)!}\ (n-2)!\ =\ \frac{n}{n-1}\ \lambda\ ,
\end{aligned}$$

also ist

$$\hat{\lambda}_{\mathrm{mod}}(x_1,...,x_n)\ :=\ \frac{n-1}{n}\ \hat{\lambda}_{\mathrm{ML}}(x_1,...,x_n)\ =\ \frac{1}{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n x_i}$$

ein erwartungstreuer Schätzer. Zeigen wir noch die Formeln (i) und (ii):

i) Wir substituieren

$$\begin{aligned}
y_n &:= x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1} + x_n \\
y_{n-1} &:= x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1} \\
&\ \ \vdots \\
y_2 &:= x_1 + x_2 \\
y_1 &:= x_1
\end{aligned}$$

was äquivalent ist zu

$$\begin{aligned}
y_n - y_{n-1} &= x_n \\
y_{n-1} - y_{n-2} &= x_{n-1} \\
&\ \ \vdots \\
y_2 - y_1 &= x_2 \\
y_1 &= x_1
\end{aligned} \tag{1}$$

Der Integrationsbereich $(0,\infty)^n$ transformiert sich wie folgt:

$$\begin{aligned} x_n &\in (0,\infty) \\ x_{n-1} &\in (0,\infty) \\ &\vdots \\ x_2 &\in (0,\infty) \\ x_1 &\in (0,\infty) \end{aligned}$$

ist äquivalent zu

$$\begin{aligned} y_n &\in (0,\infty) \\ y_{n-1} &\in (0,y_n) \\ y_{n-2} &\in (0,y_{n-1}) \\ &\vdots \\ y_2 &\in (0,y_3) \\ y_1 &\in (0,y_2) \end{aligned}$$

Die Funktionaldeterminante det $\frac{\partial x}{\partial y}$ ist gleich 1, da es eine Dreicksmatrix ist mit lauter Einsen auf der Hauptdiagonale. Damit erhalten wir:

$$\begin{aligned}
&\int_0^\infty \int_0^\infty \cdots \int_0^\infty f(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)\, dx_1\, dx_2 \cdots dx_n \\
&\quad = \int_0^\infty dy_n \int_0^{y_n} dy_{n-1} \cdots \int_0^{y_4} dy_3 \int_0^{y_3} dy_2 \int_0^{y_2} dy_1\ f(y_n) \\
&\quad = \int_0^\infty dy_n \int_0^{y_n} dy_{n-1} \cdots \int_0^{y_4} dy_3 \int_0^{y_3} dy_2\ y_2\ f(y_n) \\
&\quad = \int_0^\infty dy_n \int_0^{y_n} dy_{n-1} \cdots \int_0^{y_4} dy_3\ \frac{y_3^2}{2}\ f(y_n) \\
&\quad = \int_0^\infty dy_n \cdots \int_0^{y_5} dy_4\ \frac{y_4^3}{3!}\ f(y_n) \\
&\quad \vdots \\
&\quad = \int_0^\infty dy_n\ \frac{y_n^{n-1}}{(n-1)!}\ f(y_n)
\end{aligned}$$

ii) Mit partieller Integration:

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty y^m\, e^{-y}\, dy &= y^m(-e^{-y})\Big|_0^\infty - \int_0^\infty m y^{m-1}\,(-e^{-y})\, dy \\
&= 0 + m \int_0^\infty y^{m-1}\, e^{-y}\, dy \\
&= m(m-1) \int_0^\infty y^{m-2}\, e^{-y}\, dy \\
&\vdots
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\vdots\\
&= \; m(m-1)\cdots 2\cdot 1 \int_0^\infty y^0\, e^{-y}\, dy\\
&= \; m! \int_0^\infty e^{-y}\, dy \;=\; m!\,.
\end{aligned}
$$

Aufgabe 2) Wir machen eine Taylor-Entwicklung 2. Ordnung von F an dem Entwicklungspunkt x_0:

$$
F(x) \;=\; F(x_0) \,+\, F'(x_0)\,(x-x_0) \,+\, \frac{1}{2}\,F''(x_0)\,(x-x_0)^2 \;+\; O\big(\,(x-x_0)^3\,\big)
$$

Jetzt wählen wir

$$
x_0 \;:=\; \mathsf{E}[x]
$$

und bekommen

$$
F(x) \;=\; F(\,\mathsf{E}[x]\,) \,+\, F'(\,\mathsf{E}[x]\,)\,(x-\,\mathsf{E}[x]\,) \,+\, \frac{1}{2}\,F''(\,\mathsf{E}[x]\,)\,(x-\,\mathsf{E}[x]\,)^2 \;+\; O\big(\,(x-\,\mathsf{E}[x]\,)^3\,\big)
$$

Von dieser Gleichung nehmen wir den Erwartungswert und bekommen dann die gewünschte Approximation:

$$
\begin{aligned}
&\mathsf{E}\Big[\,F(x)\,\Big]\\
&\quad= \; \mathsf{E}\Big[\,F(\,\mathsf{E}[x]\,) \,+\, F'(\,\mathsf{E}[x]\,)\,(x-\,\mathsf{E}[x]\,) \,+\, \frac{1}{2}\,F''(\,\mathsf{E}[x]\,)\,(x-\,\mathsf{E}[x]\,)^2 \;+\; O\big(\,(x-\,\mathsf{E}[x]\,)^3\,\big)\,\Big]\\
&\quad= \; \mathsf{E}\Big[\,F(\,\mathsf{E}[x]\,)\Big] \,+\, \mathsf{E}\Big[\,F'(\,\mathsf{E}[x]\,)\,(x-\,\mathsf{E}[x]\,)\,\Big] \,+\, \mathsf{E}\Big[\,\frac{1}{2}\,F''(\,\mathsf{E}[x]\,)\,(x-\,\mathsf{E}[x]\,)^2\,\Big]\\
&\qquad\quad +\, \mathsf{E}\Big[\,O\big(\,(x-\,\mathsf{E}[x]\,)^3\,\big)\,\Big]\\
&\quad= \; F(\,\mathsf{E}[x]\,) \,+\, F'(\,\mathsf{E}[x]\,)\,\mathsf{E}\Big[\,(x-\,\mathsf{E}[x]\,)\Big] \,+\, \frac{1}{2}\,F''(\,\mathsf{E}[x]\,)\,\mathsf{E}\Big[\,(x-\,\mathsf{E}[x]\,)^2\Big]\\
&\qquad\quad +\, O\Big(\,\mathsf{E}\big[\,(x-\mathsf{E}[x])^3\,\big]\Big)\\
&\quad= \; F(\,\mathsf{E}[x]\,) \,+\, F'(\,\mathsf{E}[x]\,)\,(\,\mathsf{E}[x] \,-\, \mathsf{E}[x]\,) \,+\, \frac{1}{2}\,F''(\,\mathsf{E}[x]\,)\,\mathsf{V}[x]\\
&\qquad\quad +\, O\Big(\,\mathsf{E}\big[\,(x-\mathsf{E}[x])^3\,\big]\Big)\\
&\quad= \; F\big(\,\mathsf{E}[x]\big) \,+\, F'(\,\mathsf{E}[x]\,) \,\times\, 0 \,+\, \frac{1}{2}\,F''\big(\,\mathsf{E}[x]\big)\,\mathsf{V}[x] \;+\; O\Big(\,\mathsf{E}\big[\,(x-\mathsf{E}[x])^3\,\big]\Big)\\
&\quad\approx \; F\big(\,\mathsf{E}[x]\big) \,+\, \frac{1}{2}\,F''\big(\,\mathsf{E}[x]\big)\,\mathsf{V}[x]\;\;.
\end{aligned}
$$