Hochschule RheinMain
Prof. Dr. D. Lehmann SS 2023

Lösungen zum 8. Übungsblatt
Stochastik II

Aufgabe 1: **a)** Der Erwartungswert ist gegeben durch

$$\begin{aligned}
\mathsf{E}[\,x\,] \quad &= \quad \int_0^\infty x\,\lambda\,e^{-\lambda x}dx \\
&\overset{v=\lambda x}{=} \quad \int_0^\infty v\,e^{-v}\,\tfrac{dv}{\lambda} \\
&\overset{\text{part.Int.}}{=} \quad \frac{1}{\lambda}\Big\{-v\,e^{-v}\Big|_0^\infty \;-\; \int_0^\infty (-e^{-v})dv\Big\} \\
&= \quad \frac{1}{\lambda}\Big\{\,0\;+\;\int_0^\infty e^{-v}dv\Big\} \;=\; \frac{1}{\lambda}\,.
\end{aligned}$$

b) Die Likelihood-Funktion ist gegeben durch

$$\begin{aligned}
L(\{x_i\},\lambda) \quad &= \quad \prod_{i=1}^n \mathsf{Prob}\big[\,x_i \in [x_i, x_i + dx_i)\,\big] \\
&= \quad \prod_{i=1}^n \lambda\,e^{-\lambda x_i}\,dx_i \\
&= \quad \lambda^n\;e^{-\lambda\sum_{i=1}^n x_i}\;\textstyle\prod_{i=1}^n dx_i
\end{aligned}$$

und für den Logarithmus erhalten wir

$$\begin{aligned}
\log L(\{x_i\},\lambda) \quad &= \quad \log\Big[\,\lambda^n\,e^{-\lambda\sum_{i=1}^n x_i}\;\textstyle\prod_{i=1}^n dx_i\,\Big] \\
&= \quad n\log\lambda \;-\; \lambda\sum_{i=1}^n x_i \;+\; \text{const} \\
&=: \quad F(\lambda) \;+\; \text{const}
\end{aligned}$$

wobei die Konstante

$$\text{const} \quad := \quad \log\Big[\,\textstyle\prod_{i=1}^n dx_i\,\Big]$$

nur von λ unabhängige Terme enthält. Also das F ist gegeben durch

$$F(\lambda) \quad = \quad n\log\lambda \;-\; \lambda\sum_{i=1}^n x_i$$

c) Wir maximieren F:

$$\begin{aligned} F'(\lambda) &= \frac{n}{\lambda} - \sum_{i=1}^{n} x_i \stackrel{!}{=} 0 \\ \Leftrightarrow \qquad \lambda &= \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} x_i} \end{aligned}$$

also ist der Maximum-Likelihood-Schätzer gegeben durch

$$\hat{\lambda}_{\mathrm{ML}}(x_1, ..., x_n) = \frac{1}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i} \quad .$$