Hochschule RheinMain
Prof. Dr. D. Lehmann SS 2023

Lösungen zum 7. Übungsblatt
Stochastik II

Aufgabe 1) a) Mit Induktion: Für $k = 1$ haben wir

$$x_1 \;=\; \alpha^1 x_0 \;+\; \sum_{j=1}^{1} c_j\,\alpha^{1-j} \;=\; \alpha\, x_0 \;+\; c_1$$

und das ist korrekt. Die Formel gelte für k. Dann bekommen wir

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= \alpha\, x_k \;+\; c_{k+1} \\ &= \alpha \Big\{ \alpha^k x_0 \;+\; \sum_{j=1}^{k} c_j\,\alpha^{k-j} \Big\} \;+\; c_{k+1} \\ &= \alpha^{k+1} x_0 \;+\; \sum_{j=1}^{k} c_j\,\alpha^{k+1-j} \;+\; c_{k+1} \\ &= \alpha^{k+1} x_0 \;+\; \sum_{j=1}^{k+1} c_j\,\alpha^{k+1-j} \end{aligned}$$

Damit ist der Teil (a) bewiesen.

b) Die Rekursion ist gegeben durch

$$\begin{aligned} X_{t_k} &= X_{t_{k-1}} \;+\; \kappa(\mu - X_{t_{k-1}})\,\Delta t \\ &= (1-\kappa\Delta t)\, X_{t_{k-1}} \;+\; \kappa\mu\,\Delta t \end{aligned}$$

Wir können also den Teil (a) anwenden mit

$$\begin{aligned} \alpha &:= 1-\kappa\Delta t \\ c_k \;=\; c &:= \kappa\mu\,\Delta t \end{aligned}$$

und bekommen die explizite Darstellung

$$\begin{aligned} X_{t_k} &= \alpha^k X_0 \;+\; \sum_{j=1}^{k} c\,\alpha^{k-j} \\ &= \alpha^k X_0 \;+\; c\sum_{\ell=0}^{k-1} \alpha^\ell \\ &= \alpha^k X_0 \;+\; c\,\frac{1-\alpha^k}{1-\alpha} \end{aligned}$$

mit

$$\frac{c}{1-\alpha} \;=\; \frac{\kappa\,\mu\,\Delta t}{\kappa\Delta t} \;=\; \mu \tag{1}$$

Also,

$$X_{t_k} \;=\; \alpha^k x_0 \,+\, \mu\,(1-\alpha^k) \;=\; \mu \,+\, \alpha^k(x_0-\mu)$$

und Teil (b) ist bewiesen.

c) Die Rekursion ist gegeben durch

$$\begin{aligned}
X_{t_k} &= X_{t_{k-1}} \,+\, \kappa(\mu - X_{t_{k-1}})\,\Delta t \,+\, \sigma\sqrt{\Delta t}\,\phi_k \\
&= (1-\kappa\Delta t)X_{t_{k-1}} \,+\, \kappa\mu\,\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t}\,\phi_k \\
&=: \alpha\,X_{t_{k-1}} \,+\, c_k
\end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned}
\alpha &:= 1-\kappa\Delta t \\
c_k &:= \kappa\mu\,\Delta t \,+\, \sigma\sqrt{\Delta t}\,\phi_k
\end{aligned}$$

Wir können wieder den Teil (a) anwenden und bekommen die explizite Darstellung

$$\begin{aligned}
X_{t_k} &= \alpha^k X_0 \,+\, \sum_{j=1}^{k} c_j\,\alpha^{k-j} \\
&= \alpha^k X_0 \,+\, \sum_{j=1}^{k}\big(\kappa\mu\,\Delta t \,+\, \sigma\sqrt{\Delta t}\,\phi_j\big)\,\alpha^{k-j} \\
&= \alpha^k X_0 \,+\, \kappa\mu\,\Delta t \sum_{\ell=0}^{k-1}\alpha^\ell \,+\, \sigma\sqrt{\Delta t}\,\sum_{j=1}^{k}\phi_j\,\alpha^{k-j} \\
&= \alpha^k X_0 \,+\, \kappa\mu\,\Delta t\,\frac{1-\alpha^k}{1-\alpha} \,+\, \sigma\sqrt{\Delta t}\,\sum_{j=1}^{k}\phi_j\,\alpha^{k-j}
\end{aligned}$$

mit

$$\frac{\kappa\mu\,\Delta t}{1-\alpha} \;=\; \frac{\kappa\mu\,\Delta t}{\kappa\Delta t} \;=\; \mu$$

Also,

$$\begin{aligned}
X_{t_k} &= \alpha^k X_0 \,+\, \mu\,(1-\alpha^k) \,+\, \sigma\sqrt{\Delta t}\,\sum_{j=1}^{k}\phi_j\,\alpha^{k-j} \\
&= \mu \,+\, \alpha^k(x_0-\mu) \,+\, \sigma\sqrt{\Delta t}\,\sum_{j=1}^{k}\phi_j\,\alpha^{k-j}
\end{aligned}$$

mit $\alpha = 1-\kappa\Delta t\,$. Damit ist auch Teil (c) gezeigt.

Aufgabe 2) Wir benutzen die explizite Darstellung aus Teil (c) von Aufgabe 1:

$$X_{t_k} \;=\; \mu \;+\; \alpha^k(x_0-\mu) \;+\; \sigma\sqrt{\Delta t}\,\sum_{j=1}^{k}\phi_j\,\alpha^{k-j} \tag{2}$$

Da die ϕ_j unabhängige, standard-normalverteilte Zufallszahlen sind, gilt

$$\begin{aligned}\mathsf{E}[\,\phi_j\,] &= 0\\ \mathsf{E}[\,\phi_j\phi_k\,] &= \delta_{j,k}\end{aligned}$$

Also,

$$\begin{aligned}\mathsf{E}[\,X_{t_k}\,] &= \mu \;+\; \alpha^k(x_0-\mu) \;+\; \sigma\sqrt{\Delta t}\,\sum_{j=1}^{k}\mathsf{E}\,\phi_j\,]\,\alpha^{k-j}\\ &= \mu \;+\; \alpha^k(x_0-\mu)\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\mathsf{V}[\,X_{t_k}\,] &= \mathsf{E}\Big[\,\big(\,X_{t_k} \;-\; \mathsf{E}[X_{t_k}]\,\big)^2\,\Big]\\ &= \mathsf{E}\Big[\,\big(\,\sigma\sqrt{\Delta t}\,\sum_{j=1}^{k}\phi_j\,\alpha^{k-j}\,\big)^2\,\Big]\\ &= \sigma^2\Delta t\,\sum_{i,j=1}^{k}\mathsf{E}[\,\phi_i\phi_j\,]\,\alpha^{k-i}\,\alpha^{k-j}\\ &= \sigma^2\Delta t\,\sum_{i,j=1}^{k}\delta_{i,j}\,\alpha^{k-i}\,\alpha^{k-j}\\ &= \sigma^2\Delta t\,\sum_{j=1}^{k}(\alpha^2)^{k-j} \;=\; \sigma^2\Delta t\,\sum_{\ell=0}^{k-1}(\alpha^2)^{\ell}\\ &= \sigma^2\Delta t\,\frac{1-\alpha^{2k}}{1-\alpha^2} \;=\; \sigma^2\Delta t\,\frac{1-\alpha^{2k}}{(1-\alpha)(1+\alpha)}\\ &= \sigma^2\Delta t\,\frac{1-(1-\kappa\Delta t)^{2k}}{\kappa\Delta t(2-\kappa\Delta t)} \;=\; \frac{\sigma^2}{\kappa}\,\frac{1-(1-\kappa\Delta t)^{2k}}{2-\kappa\Delta t}\end{aligned}$$

Wegen

$$\begin{aligned}\alpha^k \;=\; (1-\kappa\Delta t)^k \quad &= \quad \big(\,1 - \frac{\kappa\,k\Delta t}{k}\,\big)^k \;=\; \big(\,1 - \frac{\kappa\,t_k}{k}\,\big)^k\\ &\overset{\substack{k\to\infty\\ t_k\,=\,t\text{ fest}}}{\longrightarrow} \quad e^{-\kappa t_k} \;=\; e^{-\kappa t}\end{aligned}$$

bekommen wir dann im Limes $\Delta t \to 0$ oder $k \to \infty$

$$\begin{aligned}\lim_{\Delta t\to 0}\mathsf{E}[\,X_t\,] &= \lim_{\Delta t\to 0}\big\{\,\mu \;+\; \alpha^k(x_0-\mu)\,\big\}\\ &= \mu \;+\; (x_0-\mu)\,e^{-\kappa t}\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\lim_{\Delta t\to 0}\mathsf{V}[\,X_t\,] &= \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\sigma^2}{\kappa}\,\frac{1-(1-\kappa\Delta t)^{2k}}{2-\kappa\Delta t}\\ &= \frac{\sigma^2}{\kappa}\,\frac{1-e^{-2\kappa t}}{2} \;=\; \frac{\sigma^2}{2\kappa}\,(1-e^{-2\kappa t}) \;\;.\end{aligned}$$

Aufgabe 3) ..machen wir noch am Dienstag in der Vorlesung.