Hochschule RheinMain
Prof. Dr. D. Lehmann SS 2023

Lösungen zum 6. Übungsblatt
Stochastik II

Aufgabe 1) a) Die Dichte für eine Normalverteilung mit Mittelwert μ und Standardabweichung σ lautet

$$p_{\mu,\sigma}(x) \;=\; \tfrac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\, e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

Wenn das im wesentlichen gleich einem e^{-x^2} sein soll, dann müssen wir haben

$$\begin{aligned} \mu &= 0 \\ \sigma^2 &= \tfrac{1}{2} \end{aligned}$$

Als Vorfaktor brauen wir dann also ein

$$\tfrac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \;=\; \tfrac{1}{\sqrt{\pi}}$$

Also schreiben wir

$$\begin{aligned} I &= \textstyle\int_{-1}^2 e^{-x^2} dx \\ &= \textstyle\int_{\mathbb{R}} \chi(-1<x<2)\, e^{-x^2} dx \\ &= \textstyle\int_{\mathbb{R}} \sqrt{\pi}\, \chi(-1<x<2)\, \tfrac{1}{\sqrt{\pi}}\, e^{-x^2} dx \\ &= \textstyle\int_{\mathbb{R}} F(x)\, p(x)\, dx \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned} p(x) &:= \tfrac{1}{\sqrt{\pi}}\, e^{-x^2} \;=\; p_{\mu=0,\,\sigma=\frac{1}{\sqrt{2}}}(x) \\ F(x) &:= \sqrt{\pi}\, \chi(-1<x<2) \end{aligned}$$

Also

$$I \;\approx\; \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} F(x_i)$$

wobei die x_i mit Mittelwert $\mu = 0$ und Standardabweichung $\sigma = \frac{1}{\sqrt{2}}$ normalverteilte Zufallszahlen sind.

b) Wir schreiben

$$\begin{aligned} I &= \textstyle\int_{-1}^2 e^{-x^2} dx \\ &= \textstyle\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}\, \chi(-1<x<2)\, dx \\ &= \textstyle\int_{\mathbb{R}} 3\, e^{-x^2}\, \tfrac{1}{3}\, \chi(-1<x<2)\, dx \\ &= \textstyle\int_{\mathbb{R}} F(x)\, p(x)\, dx \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned} p(x) &:= \tfrac{1}{3}\,\chi(-1 < x < 2) \\ F(x) &:= 3\,e^{-x^2} \end{aligned}$$

Also

$$I \;\approx\; \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} F(x_i)$$

wobei die x_i auf dem Intervall $[-1,2]$ gleichverteilte Zufallszahlen sind.

Drücken wir noch das exakte Resultat durch die Φ-Funktion

$$\Phi(x) \;:=\; \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{y^2}{2}}\,\tfrac{dy}{\sqrt{2\pi}}$$

aus. Wir schreiben

$$\begin{aligned} I &= \int_{-1}^{2} e^{-x^2} dx \\ &= \int_{-\sqrt{2}}^{2\sqrt{2}} e^{-\frac{y^2}{2}}\,\tfrac{dy}{\sqrt{2}} \\ &= \sqrt{\pi}\int_{-\sqrt{2}}^{2\sqrt{2}} e^{-\frac{y^2}{2}}\,\tfrac{dy}{\sqrt{2\pi}} \\ &= \sqrt{\pi}\Big\{ \int_{-\infty}^{2\sqrt{2}} e^{-\frac{y^2}{2}}\,\tfrac{dy}{\sqrt{2\pi}} \;-\; \int_{-\infty}^{-\sqrt{2}} e^{-\frac{y^2}{2}}\,\tfrac{dy}{\sqrt{2\pi}} \Big\} \\ &= \sqrt{\pi}\Big\{ \Phi(2\sqrt{2}) \;-\; \Phi(-\sqrt{2}) \Big\}\,. \end{aligned}$$

Aufgabe 2) Hier haben wir einfach

$$\begin{aligned} p(x) &= p(x_1,\cdots,x_n) \;:=\; \chi_{[0,1]^n}(x) \;=\; \prod_{k=1}^{n} \chi_{[0,1]}(x_k) \\ F(x) &= F(x_1,\cdots,x_n) \;:=\; \chi\big(\,0 \le x_1+\cdots+x_n \le 1\,\big) \end{aligned}$$

Also

$$I \;\approx\; \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} F(x_{i,1},\cdots,x_{i,n})$$

wobei die $x_{i,k}$ auf dem Intervall $[0,1]$ gleichverteilte Zufallszahlen sind.

Aufgabe 3) **a)** Wir wählen

$$\begin{aligned} p(\phi) &= \tfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\,e^{-\frac{\phi^2}{2}} \\ F(\phi) &= \log(\phi^2) \end{aligned}$$

und berechnen die Monte Carlo Summe mit standard-normalverteilten Zufallszahlen.

b) Wir wählen

$$
\begin{aligned}
p(x) &= 2\, e^{-2x} \cdot \chi(x \geq 0) \\
F(x) &= \frac{1}{2}\, \big(1 + x + x^2 + x^3 + x^4 \big)
\end{aligned}
$$

und berechnen die Monte Carlo Summe mit exponentialverteilten Zufallszahlen. Wir checken gegen das exakte Resultat, das ist

$$
\begin{aligned}
\int_0^\infty (1 + x + x^2 + x^3 + x^4)\, e^{-2x}\, dx &= \int_0^\infty \Big(1 + \frac{y}{2} + \frac{y^2}{4} + \frac{y^3}{8} + \frac{y^4}{16} \Big)\, e^{-y}\, \frac{dy}{2} \\
&= \frac{1}{2} \Big(1 + \frac{1}{2} + \frac{2!}{4} + \frac{3!}{8} + \frac{4!}{16} \Big) \\
&= \frac{1}{2} \Big(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{3}{4} + \frac{3}{2} \Big) \\
&= 2\, +\, \frac{1}{8}
\end{aligned}
$$

c) Hier verzichten wir auf das analytische Resultat und machen als Sicherheitscheck 2 Monte Carlo Rechnungen, die dann bis auf random noise übereinstimmen sollten: Bei der ersten wählen wir

$$
\begin{aligned}
p(x) &= 2\, e^{-2x} \cdot \chi(x \geq 0) \\
F(x) &= \frac{1}{2}\, \big(1 + x + x^2 + x^3 + x^4 \big)\, \chi(0 \leq x \leq 1/2)
\end{aligned}
$$

und berechnen die Monte Carlo Summe mit exponentialverteilten Zufallszahlen. Für die zweite Simulation wählen wir

$$
\begin{aligned}
p(x) &= 2\, \chi(0 \leq x \leq 1/2) \\
F(x) &= \frac{1}{2}\, \big(1 + x + x^2 + x^3 + x^4 \big)\, e^{-2x}
\end{aligned}
$$

und berechnen die Monte Carlo Summe mit auf dem Intervall $[0, 1/2]$ gleichverteilten Zufallszahlen.

d) Wir wählen

$$
\begin{aligned}
p(x,y) &= \frac{1}{4}\, \chi(-1 \leq x \leq 1)\, \chi(-1 \leq y \leq 1) \\
F(x,y) &= 4\, |x - y|
\end{aligned}
$$

und berechnen die Monte Carlo Summe mit auf dem Quadrat $[-1,1]^2$ gleichverteilten Zufallszahlen. Wir checken gegen das exakte Resultat, das ist

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}|x-y|\,dx\,dy &= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}|x-y|\,\big\{\,\chi(x<y)+\chi(x>y)\,\big\}\,dx\,dy \\
&= 2\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}|x-y|\,\chi(x<y)\,dx\,dy \\
&= 2\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{y}(y-x)\,dx\,dy \\
&= -2\int_{-1}^{1}\frac{(y-x)^2}{2}\Big|_{-1}^{y}\,dy \\
&= +2\int_{-1}^{1}\frac{(y+1)^2}{2}\,dy \\
&= \frac{(y+1)^3}{3}\Big|_{-1}^{1} \\
&= \frac{8}{3}\ .
\end{aligned}$$