Lösungen zum 3. Übungsblatt
Stochastik II

Aufgabe 1: a) Wir haben

$$
\begin{aligned}
\mathsf{E}[X] &= \sum_{k=1}^{\infty} k \times p_\lambda(k) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} k \times \frac{\lambda^k}{k!}\, e^{-\lambda} \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^k}{(k-1)!}\, e^{-\lambda} \\
&= \lambda \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}\, e^{-\lambda} \\
&= \lambda \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{\lambda^{\ell}}{\ell!}\, e^{-\lambda} \\
&= \lambda\, e^{\lambda}\, e^{-\lambda} \;=\; \lambda
\end{aligned}
$$

b) Die Varianz ist gegeben durch

$$
\mathsf{V}[X] \;=\; \mathsf{E}[X^2] - \mathsf{E}[X]^2 \;=\; \sum_{k=1}^{\infty} k^2 \times p_\lambda(k) \;-\; \lambda^2
$$

mit

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{\infty} k^2 \times p_\lambda(k) &= \sum_{k=1}^{\infty} k^2 \times \frac{\lambda^k}{k!}\, e^{-\lambda} \\
&= \Big(\lambda \frac{d}{d\lambda}\Big)^2 \Big\{ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} \Big\}\, e^{-\lambda} \\
&= \Big\{ \Big(\lambda \frac{d}{d\lambda}\Big)^2 e^{\lambda} \Big\}\, e^{-\lambda} \\
&= \Big\{ \lambda \frac{d}{d\lambda} (\lambda\, e^{\lambda}) \Big\}\, e^{-\lambda} \\
&= \Big\{ \lambda \big[1\, e^{\lambda} + \lambda\, e^{\lambda} \big] \Big\}\, e^{-\lambda} \\
&= \lambda + \lambda^2
\end{aligned}
$$

und damit

$$\begin{aligned}\mathsf{V}[X] &= \sum_{k=1}^{\infty} k^2 \times p_\lambda(k) \; - \; \lambda^2 \\ &= \lambda \, + \, \lambda^2 \; - \; \lambda^2 \; = \; \lambda \qquad \blacksquare\end{aligned}$$

Aufgabe 2: a) Wir haben

$$\begin{aligned}\mathsf{Prob}\big[\, X+Y \;=\; n \,\big] &= \sum_{k=0}^{n} \mathsf{Prob}\big[\, X \;=\; k \,\big] \; \times \; \mathsf{Prob}\big[\, Y \;=\; n-k \,\big] \\ &= \sum_{k=0}^{n} p_\lambda(k) \times p_\mu(n-k) \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{\lambda^k}{k!} \; e^{-\lambda} \times \frac{\mu^{n-k}}{(n-k)!} \; e^{-\mu} \\ &= \frac{1}{n!} \; \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} \; \lambda^k \; \mu^{n-k} \; e^{-(\lambda+\mu)} \\ &= \frac{1}{n!} \; \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \; \lambda^k \; \mu^{n-k} \; e^{-(\lambda+\mu)} \\ &= \frac{(\lambda+\mu)^n}{n!} \; e^{-(\lambda+\mu)}\end{aligned}$$

b) Die Behauptung gelte für n, $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ sei also Poisson-verteilt mit Parameter $\lambda = n$. Dann können wir schreiben

$$\begin{aligned}S_{n+1} &= X_1 + \cdots + X_n + X_{n+1} \\ &= S_n + X_{n+1}\end{aligned}$$

und nach Teil (a) ist das Poisson-verteilt mit Parameter $\lambda + \mu = n+1$. $\blacksquare$

Aufgabe 3: (i) Wir haben

$$Z_n \;=\; \frac{S_n \; - \; n}{\sqrt{n}} \;=\; \frac{1}{\sqrt{n}} \Big(X_1 + \cdots + X_n \; - \; n \Big)$$

und

$$\begin{aligned}\max(Z_n, 0) &= \frac{1}{\sqrt{n}} \max\Big\{ \, X_1 + \cdots + X_n \; - \; n \, , \, 0 \, \Big\} \\ &= \frac{1}{\sqrt{n}} \max\Big\{ \, S_n \; - \; n \, , \, 0 \, \Big\}\end{aligned}$$

wobei die S_n also Poisson-verteilt mit Parameter $\lambda = n$ sind, also

$$\mathsf{Prob}\big[\, S_n \;=\; k \,\big] \;\;=\;\; \frac{n^k}{k!}\, e^{-n}$$

Damit können wir den Erwartungswert jetzt folgendermassen evaluieren:

$$\begin{aligned}
\mathsf{E}\big[\max(Z_n,0)\big] \;&=\; \frac{1}{\sqrt{n}}\,\mathsf{E}\Big[\max\big\{\, S_n \;-\; n\,,\, 0 \,\big\}\Big] \\
&=\; \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=0}^{\infty} \max\big\{\, k \;-\; n\,,\, 0 \,\big\} \;\times\; \mathsf{Prob}\big[\, S_n \;=\; k \,\big] \\
&=\; \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=0}^{\infty} \max\big\{\, k \;-\; n\,,\, 0 \,\big\} \;\times\; \frac{n^k}{k!}\, e^{-n} \\
&=\; \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=n+1}^{\infty} \big(\, k \;-\; n \,\big) \;\times\; \frac{n^k}{k!}\, e^{-n} \\
&=\; \frac{e^{-n}}{\sqrt{n}} \left\{ \sum_{k=n+1}^{\infty} k\, \frac{n^k}{k!} \;-\; \sum_{k=n+1}^{\infty} n\, \frac{n^k}{k!} \right\} \\
&=\; \frac{e^{-n}}{\sqrt{n}} \left\{ \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{n^k}{(k-1)!} \;-\; \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{n^{k+1}}{k!} \right\} \\
&=\; \frac{e^{-n}}{\sqrt{n}} \left\{ \sum_{\ell=n}^{\infty} \frac{n^{\ell+1}}{\ell!} \;-\; \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{n^{k+1}}{k!} \right\} \\
&=\; \frac{e^{-n}}{\sqrt{n}}\, \frac{n^{n+1}}{n!} \\
&=\; \sqrt{n}\, \frac{(n/e)^n}{n!}
\end{aligned}$$

(ii) Andererseits, mit dem zentralen Grenzwertsatz, erhalten wir

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \mathsf{E}\big[\max(Z_n,0)\big] \;&=\; \int_{\mathbb{R}} \max(z,0)\, e^{-\frac{z^2}{2}}\, \frac{dz}{\sqrt{2\pi}} \\
&=\; \int_0^{\infty} z\, e^{-\frac{z^2}{2}}\, \frac{dz}{\sqrt{2\pi}} \\
&=\; \frac{1}{\sqrt{2\pi}}
\end{aligned}$$

Also insgesamt, mit (i) und (ii):

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \;\;=\;\; \lim_{n\to\infty} \mathsf{E}\big[\max(Z_n,0)\big] \;\;=\;\; \lim_{n\to\infty} \sqrt{n}\, \frac{(n/e)^n}{n!}$$

oder

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{2\pi n}\, \frac{(n/e)^n}{n!} \;\;=\;\; 1$$

und wir haben die Stirlingsche Formel bewiesen. ■