Hochschule RheinMain
Prof. Dr. D. Lehmann SS 2023

Lösungen zum 10. Übungsblatt
Stochastik II

Aufgabe 1) **a)** Auf dem 3. Übungsblatt hatten wir in der ersten Aufgabe gezeigt:

$$\begin{aligned} \mathsf{E}[\,x_i\,] &= \lambda \\ \mathsf{V}[\,x_i\,] &= \lambda \end{aligned}$$

für jede mit Parameter λ Poisson-verteilte Zufallszahl x_i. Da nach Voraussetzung alle x_i unabhängig sind, bekommen wir dann sofort

$$\begin{aligned} \mathsf{V}[\hat\lambda_{\mathrm{ML}}] &= \mathsf{V}\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i\right] \\ &= \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^n \mathsf{V}[\,x_i\,] \\ &= \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^n \lambda \\ &= \frac{n\lambda}{n^2} \;=\; \frac{\lambda}{n}\;. \end{aligned}$$

b) Die Fisher-Informationsmatrix war gegeben durch

$$I(\theta) \;:=\; \left(-\,\mathsf{E}\Big[\tfrac{\partial^2 \log p_\theta}{\partial\theta_k\partial\theta_\ell}\Big]\right)_{k,\ell=1,\dots,m} \;\in\; \mathbb{R}^{m\times m}$$

mit

$$\mathsf{E}\Big[\tfrac{\partial^2 \log p_\theta}{\partial\theta_k\partial\theta_\ell}\Big] \;=\; \int_{\mathbb{R}^n} \tfrac{\partial^2 \log p_\theta}{\partial\theta_k\partial\theta_\ell}(x_1,\cdots,x_n)\; p_\theta(x_1,\cdots,x_n)\; d^n x$$

In diesem Fall ist

$$p_\theta(x) \;=\; p_\lambda(x_1,\cdots,x_n) \;=\; \prod_{i=1}^n \left\{\, \tfrac{\lambda^{x_i}}{x_i!}\, e^{-\lambda} \,\right\} \tag{1}$$

mit $x_i \in \{0,1,2,\cdots\}$, die x_i sind hier also diskret. In einem solchen Fall ist das Integral als eine Summe zu interpretieren. Die Normierungsbedingung lautet also

$$\sum_{x_1,\cdots,x_n=0}^{\infty} p_\lambda(x_1,\cdots,x_n) \;=\; 1$$

und $\theta = \theta_1 = \lambda$ ist der einzige Modellparameter. Die Fisher-Informationsmatrix ist dann eine 1×1 Matrix, also einfach nur eine Zahl, gegeben durch

$$I(\lambda) \;=\; \mathsf{E}\Big[\tfrac{\partial^2 \log p_\lambda}{\partial\lambda^2}\Big] \;=\; \sum_{x_1,\cdots,x_n=0}^{\infty} \tfrac{\partial^2 \log p_\lambda}{\partial\lambda^2}(x_1,\cdots,x_n)\; p_\lambda(x_1,\cdots,x_n)$$

Aus Gleichung (1) folgt

$$\begin{aligned}
p_\lambda(x_1,\cdots,x_n) &= \frac{\lambda^{x_1+\cdots+x_n}}{x_1!\cdots x_n!}\, e^{-n\lambda} \\
\log p_\lambda(x_1,\cdots,x_n) &= (x_1+\cdots+x_n)\log\lambda \;-\; \log(x_1!\cdots x_n!) \;-\; n\lambda
\end{aligned}$$

und damit

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \log p_\lambda}{\partial\lambda} &= \frac{x_1+\cdots x_n}{\lambda} \;-\; n \\
\frac{\partial^2 \log p_\lambda}{\partial\lambda^2} &= -\,\frac{x_1+\cdots+x_n}{\lambda^2}
\end{aligned}$$

Davon müssen wir den Erwartungswert berechnen,

$$\begin{aligned}
I(\lambda) &= -\,\mathsf{E}\Big[\tfrac{\partial^2 \log p_\lambda}{\partial\lambda^2}\Big] \\
&= -\,\mathsf{E}\Big[-\,\frac{x_1+\cdots+x_n}{\lambda^2}\Big] \\
&= +\,\frac{\mathsf{E}[x_1]+\cdots+\mathsf{E}[x_n]}{\lambda^2} \\
&\overset{\text{UeBlatt3}}{=} +\,\frac{\lambda+\cdots+\lambda}{\lambda^2} = \frac{n\lambda}{\lambda^2} = \frac{n}{\lambda}
\end{aligned}$$

c) Die Cramer-Rao Abschätzung für diesem Fall lautet: Für jeden erwartungstreuen Schätzer $\tilde\lambda$ gilt

$$\mathsf{V}[\tilde\lambda] \;\geq\; I^{-1}(\lambda)$$

Wegen Teil (b) ist offensichtlich

$$I^{-1}(\lambda) \;=\; \frac{\lambda}{n}$$

Also bekommen wir

$$\mathsf{V}[\tilde\lambda] \;\geq\; \frac{\lambda}{n} \;=\; \mathsf{V}[\hat\lambda_{\mathrm{ML}}]$$

und die Behauptung ist bewiesen.