Hochschule RheinMain SS 2023
Prof. Dr. D. Lehmann

10. Übungsblatt zur Vorlesung Finanzmathematik mit Excel und VBA

Aufgabe 1) In dem Lösungs-Sheet zu Übungsblatt 9 haben wir d-Tages Mittelwerte und Standardabweichungen von q-Day Returns berechnet. Dabei waren die q-Day Returns definiert durch

$$\mathrm{ret}_q(t_i) \;:=\; \frac{S(t_i)-S(t_{i-q})}{S(t_{i-q})} \tag{1}$$

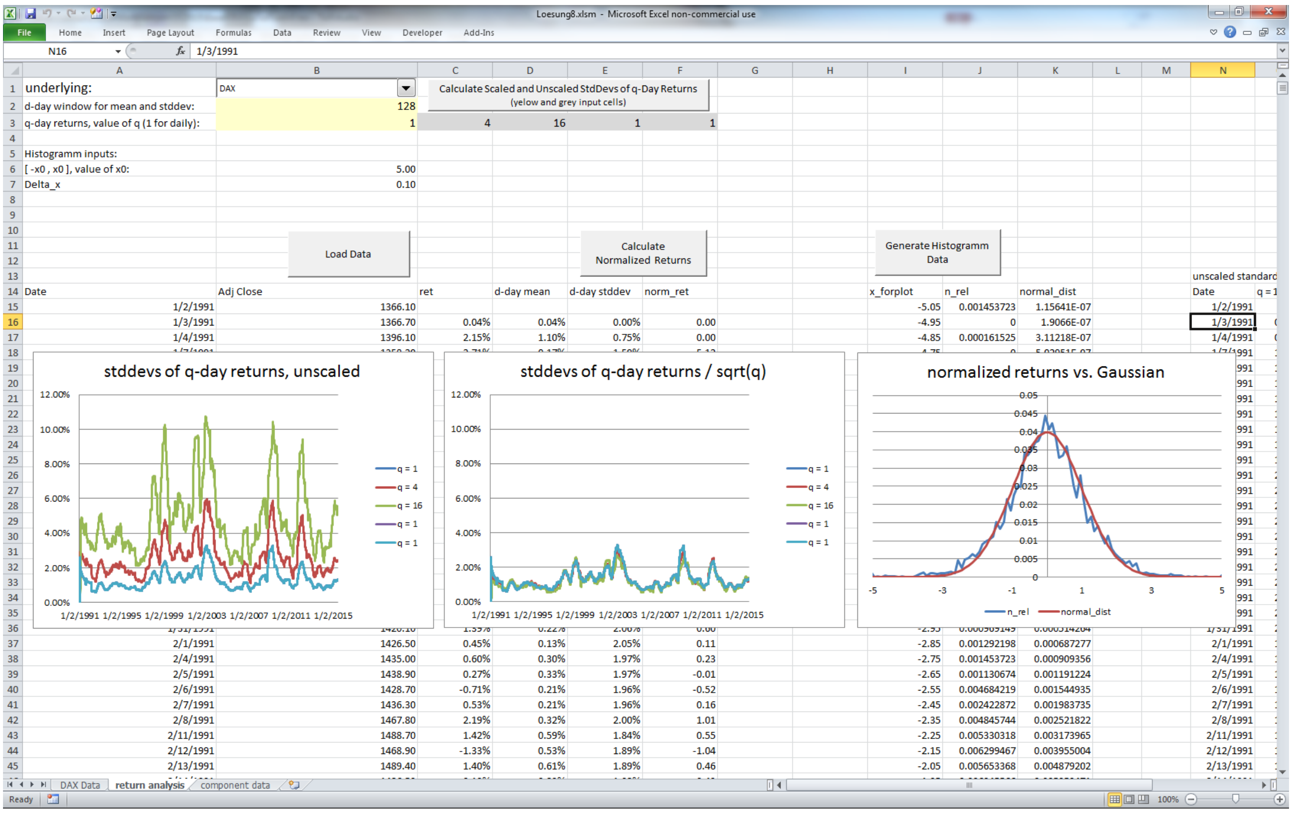
Allgemeiner würde man die Returns für einen Zeithorizont Δt definieren durch

$$\mathrm{ret}_{\Delta t}(t) \;:=\; \frac{S(t) \;-\; S(t-\Delta t)}{S(t-\Delta t)} \tag{2}$$

In dieser Aufgabe wollen wir uns davon überzeugen, dass die Standardabweichungen von solchen Returns proportional sind zu $\sqrt{\Delta t}$, die d-Tages Standardabweichungen (etwa mit d=60, 3 Monate, oder d=125, 6 Monate) der q-Day Returns sind proportional zu Wurzel aus q (für beliebige $20 \lessapprox d \lessapprox 250$). Wir wollen also zeigen, dass für eine feste Wahl von d (wählen wir etwa $d = 128$), die Grössen

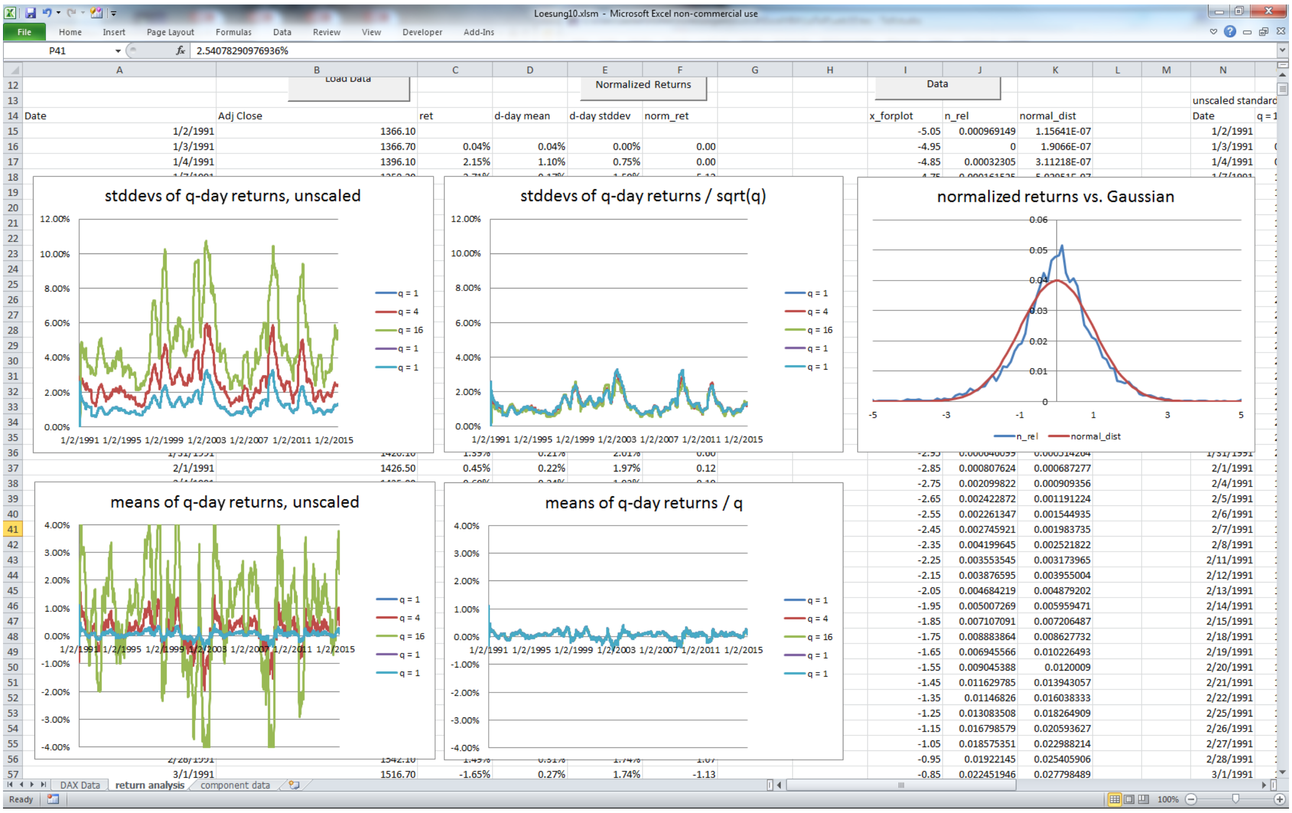
$$\sigma_{t_i} \;:=\; \frac{\mathrm{stddev}_d[\mathrm{ret}_q](t_i)}{\sqrt{q}} \tag{3}$$

im wesentlichen unabhängig sind von q, wie man das etwa auf dem folgenden Screenshot erkennen kann, auf dem σ_{t_i} für die Werte von $q = 1$, $q = 4$ und $q = 16$ geplottet ist (für die DAX-Zeitreihe):



Laden Sie sich dazu von der Vorlesungshomepage das Sheet `Lösung9.xlsm` herunter und bauen Sie die entsprechende Funktionalität in das return analysis sheet ein. Dabei soll das VBA-Makro, welches sich hiner dem Button 'Calculate Scaled and Unscaled StdDevs of q-Day Returns' verbirgt, die Werte von q aus den Zellen B3 bis F3 einlesen und dann die Grössen $\mathrm{stddev}_d[\mathrm{ret}_q](t_i)$ und $\frac{\mathrm{stddev}_d[\mathrm{ret}_q](t_i)}{\sqrt{q}}$ berechnen und dann auf dem Sheet, etwa in den Spalten N bis Z, ausgeben.

Aufgabe 2) Nachdem wir uns in Aufgabe 1 davon überzeugt haben, dass die Standardabweichungen mit $\sqrt{\Delta t}$ skalieren, wollen wir hier jetzt noch zeigen, dass die Mittelwerte der Returns mit Δt skalieren. Schreiben Sie dazu die relevanten Grössen auf das sheet return analysis, in die Spalten rechts von der Spalte Z, in der sich ja noch Standardabweichungen von Aufgabe 1 befinden. Sie sollten in der Lage sein, die folgende Diagramme in der unteren Zeile des Screenshots zu reproduzieren (wieder für die DAX-Zeitreihe mit $d = 128$):



Auf Grund dieser Resultate ist es also sinnvoll, folgende Modellannahmen für ein stochastisches Asset-Preis-Modell zu machen: Wir betrachten einen Zeithorizont Δt (etwa $\Delta t = 1$ Tag) und berechnen die zugehörigen Returns $\mathrm{ret}_{\Delta t}(t_k)$ aus Gleichung (2). Dabei sei $t_k = k\Delta t$. Die normierten Returns

$$\frac{\mathrm{ret}_{\Delta t}(t_k) - \mathrm{mean}[\mathrm{ret}_{\Delta t}]}{\mathrm{stddev}[\mathrm{ret}_{\Delta t}]} \;=\; \phi_k \qquad (0,1) - \text{normalverteilte Zufallszahl} \qquad (4)$$

sind in etwa normalverteilt und für den Mittelwert und die Standardabweichung der Returns können wir schreiben:

$$\begin{aligned} \mathrm{mean}[\mathrm{ret}_{\Delta t}] &= \mu\,\Delta t & (5) \\ \mathrm{stddev}[\mathrm{ret}_{\Delta t}] &= \sigma\sqrt{\Delta t} & (6) \end{aligned}$$

mit gewissen Parametern μ und σ (die eigentlich nicht konstant sind, sondern zeitlich variieren können). Aus (4-6) folgt nun

$$\mathrm{ret}_{\Delta t}(t_k) \;=\; \frac{S(t_k) - S(t_{k-1})}{S(t_{k-1})} \;=\; \mathrm{mean}[\mathrm{ret}_{\Delta t}] \;+\; \mathrm{stddev}[\mathrm{ret}_{\Delta t}] \times \phi_k$$

was äquivalent ist zu

$$S(t_k) \;=\; S(t_{k-1})\big[\,1 \;+\; \mu\,\Delta t \;+\; \sigma\sqrt{\Delta t}\,\phi_k\,\big] \tag{7}$$

Gleichung (7) wird als das **Black-Scholes Modell** für den Asset-Preis-Prozess $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ bezeichnet (in diskreter Zeit).