week8: Der Formalismus der zweiten Quantisierung: Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren

Es sei Γ eine endliche Menge, etwa

$$\Gamma \;=\; \Gamma_x \;=\; [-L,+L]^d_{\Delta x} \tag{1}$$

der mit positivem Gitterabstand Δx diskretisierte Würfel mit Kantenlänge $2L$, und

$$L^2(\Gamma) \;=\; \Bigl\{\; \psi : \Gamma \to \mathbb{C} \;\mid\; \Gamma \ni x \;\to\; \psi(x) \in \mathbb{C} \;\Bigr\} \;=\; \mathbb{C}^{|\Gamma|} \tag{2}$$

Die Notation $\psi \in \mathbb{C}^{|\Gamma|}$ impliziert typischerweise eine eindeutige Reihenfolge der Koordinaten, $\psi = (\psi_1, \cdots, \psi_{|\Gamma|})$, wohingegen die Notation $\psi \in L^2(\Gamma)$ zunächst mal nur die ungeordnete Menge von Funktionswerten $\{\psi(x)\}_{x\in\Gamma}$ bezeichnet, wenn auf dem Γ zunächst mal keine natürliche Reihenfolge der Elemente $x \in \Gamma$ festgelegt ist.

Es sei

$$\mathcal{B} \;=\; \Bigl\{\; e_\alpha : \Gamma \to \mathbb{C} \;\mid\; 1 \le \alpha \le |\Gamma| \;\Bigr\} \tag{3}$$

eine ONB von $L^2(\Gamma)$, orthonormal bezüglich des Standardskalarproduktes in $\mathbb{C}^{|\Gamma|}$:

$$(e_\alpha, e_\beta) \;:=\; \sum_{x\in\Gamma} \bar{e}_\alpha(x)\, e_\beta(x) \;=\; \delta_{\alpha,\beta} \tag{4}$$

Dann haben wir die folgenden ONB's für die n-Teilchen Räume $L^2_s(\Gamma^n)$ und $L^2_a(\Gamma^n)$:

$$\mathcal{B}^s_n \;=\; \Bigl\{\; \bigl[\tfrac{n!}{\Pi_\alpha n_\alpha!}\bigr]^{1/2} \otimes^s_\alpha e_\alpha^{\otimes_s n_\alpha} \;\Bigm|\; n_\alpha \in \{0,1,\cdots,n\}\,,\; \sum_\alpha n_\alpha \;=\; n \;\Bigr\} \tag{5}$$

ist eine ONB von $L^2_s(\Gamma^n)$ und

$$\mathcal{B}^a_n \;=\; \Bigl\{\; \sqrt{n!}\, \otimes^a_\alpha e_\alpha^{n_\alpha} \;\Bigm|\; n_\alpha \in \{0,1\}\,,\; \textstyle\sum_\alpha n_\alpha \;=\; n \;\Bigr\} \tag{6}$$

ist eine ONB von $L^2_a(\Gamma^n)$. Wir kürzen ab

$$|\{n_\alpha\}\rangle_s \;:=\; \bigl[\tfrac{n!}{\Pi_\alpha n_\alpha!}\bigr]^{1/2} \otimes^s_\alpha e_\alpha^{\otimes_s n_\alpha} \tag{7}$$

$$|\{n_\alpha\}\rangle_a \;:=\; \sqrt{n!}\, \otimes^a_\alpha e_\alpha^{n_\alpha} \tag{8}$$

so dass die $|\{n_\alpha\}\rangle_{s/a}$ jetzt also auf 1 normierte Funktionen oder Vektoren sind (in der Definition im week 5 hatten wir die Normierungsfaktoren weggelassen). Wir wollen noch bemerken, dass $e_\alpha^0 = 1$ als skalare Eins zu verstehen ist, also

$$e_\alpha^0 \;=\; 1 \;\in\; \mathbb{C} \;=:\; L^2(\Gamma^0)$$

und nicht etwa als eine Funktion $e_\alpha^0(x) = 1\,\forall x$, das wäre dann das Element $(1,\cdots,1) \in \mathbb{C}^{|\Gamma|} = L^2(\Gamma^1)$. Mit anderen Worten,

$$e_\alpha \otimes_a e_\beta^0 \;=\; e_\alpha \;\in\; L^2(\Gamma^1 \times \Gamma^0) \;=\; L^2(\Gamma^1)$$

ist eine Funktion von einer Variablen, nicht von zwei Variablen.

Definition 8.1 (Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren): Es sei

$$\mathcal{B} \;=\; \big\{\, e_\alpha : \Gamma \to \mathbb{C} \;\mid\; 1 \le \alpha \le |\Gamma| \;\big\}$$

eine ONB von $L^2(\Gamma)$. Für jede Basis-Funktion e_α definieren wir bosonische und fermionische Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren a_α^+, a_α und c_α^+, c_α

$$\begin{aligned} a_\alpha^+ &: L_s^2(\Gamma^n) \;\to\; L_s^2(\Gamma^{n+1}) \qquad (9)\\ a_\alpha &: L_s^2(\Gamma^{n+1}) \;\to\; L_s^2(\Gamma^n) \\ c_\alpha^+ &: L_a^2(\Gamma^n) \;\to\; L_a^2(\Gamma^{n+1}) \qquad (10)\\ c_\alpha &: L_a^2(\Gamma^{n+1}) \;\to\; L_a^2(\Gamma^n) \end{aligned}$$

durch (für $n \ge 0$)

$$a_\alpha^+ f_n \;:=\; \sqrt{n+1}\; e_\alpha \otimes_s f_n \tag{11}$$

$$c_\alpha^+ g_n \;:=\; \sqrt{n+1}\; e_\alpha \otimes_a g_n \tag{12}$$

und die Vernichtungsoperatoren a_α und c_α als die adjungierten Operatoren von a_α^+ und c_α^+ bezüglich des Standardskalarproduktes,

$$(a_\alpha f_{n+1}, f_n) \;=\; (f_{n+1}, a_\alpha^+ f_n) \tag{13}$$

$$(c_\alpha g_{n+1}, g_n) \;=\; (g_{n+1}, c_\alpha^+ g_n) \tag{14}$$

mit $f_r \in L_s^2(\Gamma^r)$ und $g_r \in L_a^2(\Gamma^r)$.

Bevor wir die wichtigsten Eigenschaften in dem Theorem 8.1 weiter unten zusammenfassen, wollen wir kurz an die Formeln erinnern, die wir in der 2. Aufgabe vom Übungsblatt 4 und in der ersten Aufgabe vom 5. Übungsblatt bewiesen hatten, diese Formeln werden wir dann zum Beweis des Theorems 8.1 benötigen.

Lemma 8.1: Es gelten die folgenden Formeln:

a) Mit den n-Teilchen Funktionen $F_n \in L^2_s(\Gamma^n)$ und $G_n \in L^2_a(\Gamma^n)$ gilt

$$
\begin{aligned}
(e_\alpha \otimes_s F_n)(x_1, \cdots, x_{n+1}) &= \frac{1}{n+1} \sum_{i=1}^{n+1} e_\alpha(x_i)\; F_n(x_1, \cdots, \widehat{x_i}, \cdots, x_{n+1}) \\
(e_\alpha \otimes_a G_n)(x_1, \cdots, x_{n+1}) &= \frac{1}{n+1} \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^{i-1}\, e_\alpha(x_i)\; G_n(x_1, \cdots, \widehat{x_i}, \cdots, x_{n+1})
\end{aligned}
$$

wobei das $\widehat{x_i}$ meint, dass das x_i in der Argumentliste wegzulassen ist.

b) Mit den 1-Teilchen Funktionen $f_1, \cdots, f_n \in L^2(\Gamma)$ gilt

$$
\begin{aligned}
(f_1 \otimes_s \cdots \otimes_s f_n)(x, \cdots) &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} f_i(x)\;\; (f_1 \otimes_s \cdots \widehat{f_i} \cdots \otimes_s f_n)(\cdots) \\
(f_1 \otimes_a \cdots \otimes_a f_n)(x, \cdots) &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} f_i(x)\;\; (f_1 \otimes_a \cdots \widehat{f_i} \cdots \otimes_a f_n)(\cdots)
\end{aligned}
$$

wobei das $\widehat{f_i}$ meint, dass dieser Faktor wegzulassen ist.

Beweis: Aufgabe 2 vom Übungsblatt 4 und Aufgabe 1 vom Übungsblatt 5. ∎

Theorem 8.1: Die bosonischen Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren a^+_α, a_α und die fermionischen Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren c^+_α, c_α haben die folgenden Eigenschaften:

a) Die Wirkung der a_α und der c_α ist gegeben durch (für $n \geq 0$)

$$
\begin{aligned}
(a_\alpha f_{n+1})(x_1, \cdots, x_n) &= \sqrt{n+1}\; \textstyle\sum_{y\in\Gamma} \bar{e}_\alpha(y)\, f_{n+1}(y, x_1, \cdots, x_n) \\
&=: \sqrt{n+1}\; (e_\alpha, f_{n+1})_1(x_1, \cdots, x_n) \qquad (15)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(c_\alpha g_{n+1})(x_1, \cdots, x_n) &= \sqrt{n+1}\; \textstyle\sum_{y\in\Gamma} \bar{e}_\alpha(y)\, g_{n+1}(y, x_1, \cdots, x_n) \\
&=: \sqrt{n+1}\; (e_\alpha, g_{n+1})_1(x_1, \cdots, x_n) \qquad (16)
\end{aligned}
$$

b) Die Wirkung auf normierte Basisvektoren sieht folgendermassen aus:

(i) Im bosonischen Fall mit $n_\beta \in \mathbb{N}_0$:

$$a^+_\alpha\, |\{n_\beta\}\rangle_s = \sqrt{n_\alpha + 1}\; \times\; |\, n_\alpha + 1, \{n_\beta\}_{\beta\neq\alpha}\, \rangle_s \qquad (17)$$

$$a_\alpha\, |\{n_\beta\}\rangle_s = \sqrt{n_\alpha}\; \times\; |\, n_\alpha - 1, \{n_\beta\}_{\beta\neq\alpha}\, \rangle_s \qquad (18)$$

mit der Definition $|\{n_\beta\}\rangle_s := 0$ falls ein $n_\beta < 0$.

(ii) Im fermionischen Fall mit $n_\beta \in \{0,1\}$:

$$c_\alpha^+ \,|\{n_\beta\}\rangle_a \;=\; (-1)^{n_{<\alpha}} \;\times\; |\, n_\alpha + 1, \{n_\beta\}_{\beta\neq\alpha}\,\rangle_a \tag{19}$$

$$c_\alpha \,|\{n_\beta\}\rangle_a \;=\; (-1)^{n_{<\alpha}} \;\times\; |\, n_\alpha - 1, \{n_\beta\}_{\beta\neq\alpha}\,\rangle_a \tag{20}$$

mit einem Vorzeichen $(-1)^{n_{<\alpha}}$ was man erhält, wenn man ein e_α von der ersten Stelle an die α-te Stelle im antisymmetrischen Produkt bewegt,

$$n_{<\alpha} \;:=\; n_1 + \cdots + n_{\alpha-1} \tag{21}$$

und der Definition $|\{n_\beta\}\rangle_a := 0$ falls ein $n_\beta \notin \{0,1\}$.

c) Es gelten die folgenden Vertauschungs- und Antivertauschungsrelationen:

$$[a_\alpha, a_\beta^+] \;:=\; a_\alpha a_\beta^+ \,-\, a_\beta^+ a_\alpha \;=\; \delta_{\alpha,\beta} \tag{22}$$

$$\{c_\alpha, c_\beta^+\} \;:=\; c_\alpha c_\beta^+ \,+\, c_\beta^+ c_\alpha \;=\; \delta_{\alpha,\beta} \tag{23}$$

und

$$[a_\alpha, a_\beta] \;=\; [a_\alpha^+, a_\beta^+] \;=\; 0 \tag{24}$$

$$\{c_\alpha, c_\beta\} \;=\; \{c_\alpha^+, c_\beta^+\} \;=\; 0 \tag{25}$$

Beweis: a) Nach Definition ist

$$\tfrac{a_\alpha^+ f_n}{\sqrt{n+1}}(x_1,\cdots,x_{n+1}) \;=\; (e_\alpha \otimes_s f_n)(x_1,\cdots,x_{n+1})$$

$$\tfrac{c_\alpha^+ g_n}{\sqrt{n+1}}(x_1,\cdots,x_{n+1}) \;=\; (e_\alpha \otimes_a g_n)(x_1,\cdots,x_{n+1})$$

Wir benutzen die Formeln aus dem Teil (a) vom Lemma 8.1:

$$(e_\alpha \otimes_s f_n)(x_1,\cdots,x_{n+1}) \;=\; \tfrac{1}{n+1}\textstyle\sum_{i=1}^{n+1} e_\alpha(x_i)\; f_n(x_1,\cdots,\widehat{x_i},\cdots,x_{n+1})$$

$$(e_\alpha \otimes_a g_n)(x_1,\cdots,x_{n+1}) \;=\; \tfrac{1}{n+1}\textstyle\sum_{i=1}^{n+1} (-1)^{i-1}\, e_\alpha(x_i)\; g_n(x_1,\cdots,\widehat{x_i},\cdots,x_{n+1})$$

Dann bekommen wir für den fermionischen Fall

$$\begin{aligned}
\Big(g_{n+1}\,,\, \tfrac{c_\alpha^+ g_n}{\sqrt{n+1}}\Big) \;&=\; (g_{n+1}, e_\alpha \otimes_a g_n)\\
&=\; \sum_{x_1,\cdots,x_{n+1}} \bar{g}_{n+1}(x_1,\cdots,x_{n+1})\; \tfrac{1}{n+1} \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^{i-1}\, e_\alpha(x_i)\; g_n(x_1,\cdots,\widehat{x_i},\cdots,x_{n+1})\\
&=\; \tfrac{1}{n+1} \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^{i-1} \sum_{x_1,\cdots,x_{n+1}} \bar{g}_{n+1}(x_1,\cdots,x_{n+1})\; e_\alpha(x_i)\; g_n(x_1,\cdots,\widehat{x_i},\cdots,x_{n+1})\\
&=\; \tfrac{1}{n+1} \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^{i-1} \sum_{x_1,\cdots,x_{n+1}} e_\alpha(x_i)\; (-1)^{i-1}\, \bar{g}_{n+1}(x_i, x_1,\cdots,\widehat{x_i},\cdots,x_{n+1}) \;\times\\
&\qquad\qquad g_n(x_1,\cdots,\widehat{x_i},\cdots,x_{n+1})
\end{aligned}$$

Wir tun die Summationsvariablen umbenennen,

$$(x_i, x_1, \cdots, \widehat{x_i}, \cdots, x_{n+1}) \quad =: \quad (y_1, y_2 \cdots, y_{n+1})$$

und erhalten weiter

$$\begin{aligned}
\left(g_{n+1} \, , \, \tfrac{c_\alpha^+ g_n}{\sqrt{n+1}} \right) &= (g_{n+1}, e_\alpha \otimes_a g_n) \\
&= \tfrac{1}{n+1} \sum_{i=1}^{n+1} \sum_{y_1,\cdots,y_{n+1}} e_\alpha(y_1) \, \bar{g}_{n+1}(y_1, y_2 \cdots, y_{n+1}) \, g_n(y_2, \cdots, y_{n+1}) \\
&= \sum_{y_1,\cdots,y_{n+1}} e_\alpha(y_1) \, \bar{g}_{n+1}(y_1, y_2 \cdots, y_{n+1}) \, g_n(y_2, \cdots, y_{n+1}) \\
&= \sum_{y_2,\cdots,y_{n+1}} \overline{(e_\alpha, g_{n+1})_1(y_2 \cdots, y_{n+1})} \, g_n(y_2, \cdots, y_{n+1}) \\
&= \big((e_\alpha, g_{n+1})_1 \, , \, g_n \big) \\
&= \left(\tfrac{c_\alpha g_{n+1}}{\sqrt{n+1}} \, , \, g_n \right)
\end{aligned}$$

mit

$$c_\alpha \, g_{n+1} \, (\cdots) \quad = \quad \sqrt{n+1} \, (e_\alpha, g_{n+1})_1 \, (\cdots) \quad = \quad \sqrt{n+1} \, \sum_x \bar{e}_\alpha(x) \, g_{n+1}(x, \cdots)$$

Der Beweis für den bosonischen Fall, für das a_α, geht analog.

Teil b, bosonischer Fall: Nach Definition ist mit $\sum_\beta n_\beta = n$

$$\begin{aligned}
a_\alpha^+ \, |\{n_\beta\}\rangle_s &= \sqrt{n+1} \left[\frac{n!}{\Pi_\beta \, n_\beta!} \right]^{1/2} e_\alpha \, \otimes_s \, \bigotimes\nolimits_\beta^s e_\beta^{\otimes_s n_\beta} \\
&= \sqrt{n_\alpha + 1} \left[\frac{(n+1)!}{(n_\alpha+1)! \, \Pi_{\beta \neq \alpha} \, n_\beta!} \right]^{1/2} e_\alpha^{\otimes_s (n_\alpha+1)} \, \otimes_s \, \bigotimes\nolimits_{\beta\neq\alpha}^s e_\beta^{\otimes_s n_\beta} \\
&= \sqrt{n_\alpha + 1} \, |n_\alpha + 1, \{n_\beta\}_{\beta \neq \alpha}\rangle_s
\end{aligned}$$

und mit Teil (a) gilt

$$a_\alpha \, |\{n_\beta\}\rangle_s \quad = \quad \sqrt{n} \left[\frac{n!}{\Pi_\beta \, n_\beta!} \right]^{1/2} \sum\nolimits_x \bar{e}_\alpha(x) \, \bigotimes\nolimits_\beta^s e_\beta^{\otimes_s n_\beta}(x, \cdots)$$

Jetzt benutzen wir den Teil (b) vom Lemma 8.1,

$$(f_1 \otimes_s \cdots \otimes_s f_n)(x, \cdots) \quad = \quad \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} f_i(x) \, \left(f_1 \otimes_s \cdots \widehat{f_i} \cdots \otimes_s f_n\right)(\cdots)$$

Damit bekommen wir unter Berücksichtigung von $(e_\alpha, e_\beta) = 0$ für $\alpha \neq \beta$:

$$
\begin{aligned}
a_\alpha \,|\{n_\beta\}\rangle_s &= \sqrt{n}\,\left[\frac{n!}{\Pi_\beta\, n_\beta!}\right]^{1/2} \frac{n_\alpha}{n}\,(e_\alpha, e_\alpha)\,\left[\bigotimes\nolimits_\beta^s e_\beta^{\otimes_s n_\beta}\right]_{n_\alpha \to n_\alpha - 1} \\
&= \sqrt{n_\alpha}\,\left[\frac{(n-1)!}{(n_\alpha - 1)!\,\Pi_{\beta\neq\alpha}\, n_\beta!}\right]^{1/2}\,\left[\bigotimes\nolimits_\beta^s e_\beta^{\otimes_s n_\beta}\right]_{n_\alpha \to n_\alpha - 1} \\
&= \sqrt{n_\alpha}\;\;|n_\alpha - 1, \{n_\beta\}_{\beta\neq\alpha}\rangle_s
\end{aligned}
$$

Teil b, fermionischer Fall: Im antisymmetrischen Fall für die c_α müssen wir ein Vorzeichen beachten: Wir haben nach Definition der c_α^+ :

$$
c_\alpha^+ \,|\{n_\beta\}\rangle_a \;=\; \sqrt{n+1}\, e_\alpha \otimes_a \;\sqrt{n!}\;\bigotimes\nolimits_\beta^a e_\beta^{n_\beta}
$$

Die rechte Seite ist nur dann ungleich 0, wenn das e_α in dem letzten Faktor noch nicht vorkommt, also wenn $n_\alpha = 0$ ist. Wegen

$$
e_\alpha \otimes_a e_\beta \;=\; -\, e_\beta \otimes_a e_\alpha
$$

ist die Definition in (8) weiter oben,

$$
|\{n_\alpha\}\rangle_a \;:=\; \sqrt{n!}\;\bigotimes\nolimits_\alpha^a e_\alpha^{n_\alpha}
$$

nicht ganz eindeutig: Um das Vorzeichen eindeutig festzulegen, müssen wir die Reihenfolge der e_α festlegen. Ok, wir haben vorausgesetzt, dass die Basisfunktionen e_α durch $\alpha \in \{1, 2, \cdots, |\Gamma|\}$ indiziert werden, dann haben wir eine natürliche Reihenfolge, und die sei jetzt vorausgesetzt. Damit bekommen wir dann

$$
\begin{aligned}
c_\alpha^+ \,|\{n_\beta\}\rangle_a &= \sqrt{n+1}\,\sqrt{n!}\, e_\alpha \otimes_a \;\bigotimes\nolimits_\beta^a e_\beta^{n_\beta} \\
&= \sqrt{(n+1)!}\;\;(-1)^{n_1 + \cdots + n_{\alpha-1}}\,\left[\bigotimes\nolimits_\beta^a e_\beta^{n_\beta}\right]_{n_\alpha \to n_\alpha + 1} \\
&= (-1)^{n_{<\alpha}} \;\times\; |n_\alpha + 1, \{n_\beta\}_{\beta\neq\alpha}\rangle_a
\end{aligned}
$$

mit der Besetzungszahl

$$
n_{<\alpha} \;:=\; n_1 + \cdots + n_{\alpha-1}
$$

Die Wirkung von c_α ist nach Teil (a) gegeben durch

$$
c_\alpha \,|\{n_\beta\}\rangle_a \;=\; \sqrt{n}\;\sum\nolimits_x \bar{e}_\alpha(x)\,\sqrt{n!}\;\bigotimes\nolimits_\beta^a e_\beta^{n_\beta}(x, \cdots)
$$

Wir wenden wieder den Teil (b) vom Lemma 8.1 an, jetzt die antisymmetrische Version:

$$
(f_1 \otimes_a \cdots \otimes_a f_n)(x, \cdots) \;=\; \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1}\, f_i(x)\;\;(f_1 \otimes_a \cdots \widehat{f_i} \cdots \otimes_a f_n)(\cdots)
$$

Wir bekommen nur dann ein Ergebnis ungleich 0, wenn das e_α unter den f_j vorkommt, also wenn das e_α in dem $\otimes_\beta^a e_\beta^{n_\beta}$ vorkommt. Steht es an der i-ten Stelle, bekommen wir ein

Vorzeichen $(-1)^{i-1}$ und $i-1$ ist dann die Anzahl der e_β vor dem e_α. Das ist nun genau die Besetzungszahl

$$n_{<\alpha} \;=\; n_1 + \cdots + n_{\alpha-1}$$

Also,

$$\begin{aligned}
c_\alpha \,|\{n_\beta\}\rangle_a &= \sqrt{n}\,\sqrt{n!}\,\frac{1}{n}\,(-1)^{n_{<\alpha}}\,(e_\alpha, e_\alpha)\,\Big[\textstyle\bigotimes_\beta^a e_\beta^{n_\beta}\Big]_{n_\alpha\to n_\alpha-1} \\
&= \sqrt{(n-1)!}\,(-1)^{n_{<\alpha}}\,\Big[\textstyle\bigotimes_\beta^a e_\beta^{n_\beta}\Big]_{n_\alpha\to n_\alpha-1} \\
&= (-1)^{n_{<\alpha}}\,|n_\alpha - 1, \{n_\beta\}_{\beta\neq\alpha}\rangle_a
\end{aligned}$$

c) Die kanonischen Vertauschungs- und Antivertauschungrelationen (22) und (23) werden in der ersten Aufgabe vom neuen Übungsblatt 8 bewiesen. Für die übrigen Fälle haben wir

$$\begin{aligned}
c_\alpha^+ c_\beta^+\, f_n &= \sqrt{(n+2)(n+1)}\;\; e_\alpha \otimes_a (e_\beta \otimes_a f_n) \\
&= \sqrt{(n+2)(n+1)}\;\; (e_\alpha \otimes_a e_\beta) \otimes_a f_n \\
&= -\sqrt{(n+2)(n+1)}\;\; (e_\beta \otimes_a e_\alpha) \otimes_a f_n \\
&= -\sqrt{(n+2)(n+1)}\;\; e_\beta \otimes_a (e_\alpha \otimes_a f_n) \\
&= -\,c_\beta^+ c_\alpha^+\, f_n
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
c_\alpha c_\beta\, f_n &= \sqrt{(n-1)}\;\; \sum_x \bar{e}_\alpha(x)\;[c_\beta f_n](x,\cdots) \\
&= \sqrt{(n-1)n}\;\; \sum_x \bar{e}_\alpha(x)\; \sum_y \bar{e}_\beta(y)\; f_n(y,x,\cdots) \\
&= \sqrt{(n-1)n}\;\; \sum_x \bar{e}_\alpha(x)\; \sum_y \bar{e}_\beta(y)\;(-1)\; f_n(x,y,\cdots) \\
&= -\sqrt{(n-1)n}\;\; \sum_y \bar{e}_\beta(y)\; \sum_x \bar{e}_\alpha(x)\; f_n(x,y,\cdots) \\
&= -\,c_\beta c_\alpha\, f_n
\end{aligned}$$

und analoge Formeln für den symmetrischen Fall. ■

Aus dem Beweis der kanonischen Vertauschungs- und Antivertauschungsrelationen (22) und (23) ergeben sich noch die folgenden Formeln, die wir dann nächste Woche gleich wieder brauchen werden:

Folgerung 8.1: Für beliebige $F_n \in L_s^2(\Gamma^n)$ und $G_n \in L_a^2(\Gamma^n)$ gilt

$$\begin{aligned}(a_\beta^+ a_\alpha F_n)(x_1, \cdots, x_n) &= \sum_{i=1}^n e_\beta(x_i) \sum_{x_0} \bar{e}_\alpha(x_0)\, F_n(x_0, x_1, \cdots, \widehat{x_i}, \cdots, x_n) \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{y_i \in \Gamma} e_\beta(x_i)\, \bar{e}_\alpha(y_i)\, F_n(x_1, \cdots, x_{i-1}, y_i, x_{i+1}, \cdots, x_n) \qquad (26)\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}(c_\beta^+ c_\alpha G_n)(x_1, \cdots, x_n) &= \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1}\, e_\beta(x_i) \sum_{x_0} \bar{e}_\alpha(x_0)\, G_n(x_0, x_1, \cdots, \widehat{x_i}, \cdots, x_n) \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{y_i \in \Gamma} e_\beta(x_i)\, \bar{e}_\alpha(y_i)\, G_n(x_1, \cdots, x_{i-1}, y_i, x_{i+1}, \cdots, x_n) \qquad (27)\end{aligned}$$

Insbesondere gilt:

$$\sum_\alpha a_\alpha^+ a_\alpha = \sum_\alpha c_\alpha^+ c_\alpha = \hat{n} \qquad (28)$$

mit dem Teilchenzahl-Operator

$$(\hat{n}\, f_n)(x_1, \cdots, x_n) = n\, f_n(x_1, \cdots, x_n) \ . \qquad (29)$$

Beweis: Ü-Blatt 8, Aufgabe 2. ■