Hochschule RheinMain
Prof. Dr. D. Lehmann

week4: Symmetrisches und Antisymmetrisches Tensorprodukt

Letzte Woche hatten wir das Tensorprodukt von zwei L^2-Räumen definiert, das war einfach

$$L^2(\Gamma_1) \otimes L^2(\Gamma_2) \;\; := \;\; L^2(\Gamma_1 \times \Gamma_2) \tag{1}$$

mit dem üblichen kartesischen Produkt von zwei Mengen

$$\Gamma_1 \times \Gamma_2 \;\; := \;\; \Big\{ \, (x_1, x_2) \;\Big|\; x_1 \in \Gamma_1,\; x_2 \in \Gamma_2 \, \Big\} \tag{2}$$

Das Tensorprodukt von zwei Elementen $\psi_1 \in L^2(\Gamma_1)$ und $\psi_2 \in L^2(\Gamma_2)$ war dann definiert durch

$$\begin{aligned} \psi_1 \otimes \psi_2 \;\; &: \;\; \Gamma_1 \times \Gamma_2 \;\to\; \mathbb{C} \\ (\psi_1 \otimes \psi_2)(x_1, x_2) \;\; &:= \;\; \psi_1(x_1)\, \psi_2(x_2) \end{aligned} \tag{3}$$

man tut da also einfach Funktionen miteinander multiplizieren. Das Tensorprodukt von n L^2-Räumen besteht dann aus Funktionen von n Variablen und ist gegeben durch

$$L^2(\Gamma_1) \otimes \cdots \otimes L^2(\Gamma_n) \;\; = \;\; L^2(\Gamma_1 \times \cdots \times \Gamma_n) \tag{4}$$

Wir wollen damit Wellenfunktionen eines quantenmechanischen n-Teilchensystems beschreiben und für die ist dann

$$\Gamma_1 \;\; = \;\; \cdots \;\; = \;\; \Gamma_n \;\; = \;\; \Gamma \;\; := \;\; \begin{cases} \Gamma_x & \text{für Spin } s = 0 \\ \Gamma_x \times \{\uparrow, \downarrow\} & \text{für Spin } s = 1/2 \end{cases} \tag{5}$$

wobei das $\Gamma_x = [-L, +L]^d_{\Delta x}$ der mit Gitterabstand $\Delta x > 0$ diskretisierte Ortsraum-Würfel $[-L, +L]^d$ war, das war dann eine endliche Menge. Der quantenmechanische Hilbertraum ist dann gegeben durch das n-fache Tensorprodukt

$$L^2(\Gamma)^{\otimes n} \;\; := \;\; L^2(\Gamma) \otimes \cdots \otimes L^2(\Gamma) \;\; = \;\; L^2(\Gamma \times \cdots \times \Gamma) \;\; = \;\; L^2(\Gamma^n) \tag{6}$$

und der Hamilton-Operator für das n-Teilchensystem ist gegeben durch

$$H_n \;\; = \;\; -\frac{\hbar^2}{2m} \sum_{i=1}^{n} \Delta^{\Gamma}_{x_i} \; + \; \frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{n} V(x_i - x_j) \tag{7}$$

wobei $\Delta^{\Gamma}_{x_i}$ der diskrete Laplace-Operator auf Γ_x ist. Wie bereits im week1 erwähnt, müssen die Wellenfunktionen von n identischen quantenmechanischen Teilchen entweder durch symmetrische (Bosonen, ganzzahliger Spin) oder durch antisymmetrische (Fermionen, halbzahliger Spin) Wellenfunktionen beschrieben werden. Das H_n in (7) wirkt also nicht auf den ganzen $L^2(\Gamma^n)$, sondern nur auf die Unterräume $L^2_s(\Gamma^n)$ oder $L^2_a(\Gamma^n)$ mit symmetrischen oder antisymmetrischen Wellenfunktionen.

Symmetrische und antisymmetrische Wellenfunktionen

Im folgenden bezeichnen wir die Elemente aus Γ mit x so dass eine Funktion $f \in L^2(\Gamma^n)$ gegeben ist durch $f = f(x_1, \cdots, x_n)$. Eventuelle Spin-Variablen $\sigma_1, \cdots, \sigma_n$ wollen wir der Einfachheit halber nicht explizit machen, die sind dann in dem $x \to (x, \sigma)$ mit drin. Wir definieren den Symmetrisierungsoperator P_s und den Antisymmetrisierungsoperator P_a

$$P_s\,,\; P_a \;\;:\;\; L^2(\Gamma^n) \;\;\to\;\; L^2(\Gamma^n) \tag{8}$$

für $n \geq 2$ durch

$$(P_s f)(x_1, \cdots, x_n) \;\;=\;\; \tfrac{1}{n!} \textstyle\sum_{\pi \in S_n} f(x_{\pi 1}, \cdots, x_{\pi n}) \tag{9}$$

$$(P_a f)(x_1, \cdots, x_n) \;\;=\;\; \tfrac{1}{n!} \textstyle\sum_{\pi \in S_n} \mathrm{sign}\pi \; f(x_{\pi 1}, \cdots, x_{\pi n}) \tag{10}$$

wobei die Summe über alle Permutationen π der Zahlen $\{1, \cdots, n\}$ geht. Die Räume $L^2_s(\Gamma^n)$ und $L^2_a(\Gamma^n)$ von symmetrischen und antisymmetrischen n-Teilchen Wellenfunktionen können wir dann definieren durch

$$L^2_s(\Gamma^n) \;\;:=\;\; P_s L^2(\Gamma^n) \tag{11}$$

$$L^2_a(\Gamma^n) \;\;:=\;\; P_a L^2(\Gamma^n) \tag{12}$$

Offensichtlich gilt dann für jede Permutation $\tau \in S_n$

$$(P_s f)(x_{\tau 1}, \cdots, x_{\tau n}) \;\;=\;\; (P_s f)(x_1, \cdots, x_n) \tag{13}$$

$$(P_a f)(x_{\tau 1}, \cdots, x_{\tau n}) \;\;=\;\; \mathrm{sign}\tau \; (P_a f)(x_1, \cdots, x_n) \tag{14}$$

und, da es genau $n!$ Permutationen der Zahlen in $\{1, \cdots, n\}$ gibt,

$$P_s^2 \;\;=\;\; P_s \tag{15}$$

$$P_a^2 \;\;=\;\; P_a \tag{16}$$

und $P_s P_a \;=\; P_a P_s \;=\; 0$, P_s und P_a sind orthogonale Projektionen.

Für ein $f \in L^2(\Gamma^n)$ und ein $g \in L^2(\Gamma^m)$ definieren wir jetzt ein symmetrisches und ein antisymmetrisches Tensorprodukt

$$\cdot \otimes_s \cdot \;\;:\;\; L^2(\Gamma^n) \times L^2(\Gamma^m) \;\;\to\;\; L^2_s(\Gamma^{n+m}) \tag{17}$$

$$\cdot \otimes_a \cdot \;\;:\;\; L^2(\Gamma^n) \times L^2(\Gamma^m) \;\;\to\;\; L^2_a(\Gamma^{n+m}) \tag{18}$$

durch

$$\begin{aligned} f \otimes_s g &:= P_s(f \otimes g) \\ f \otimes_a g &:= P_a(f \otimes g) \end{aligned} \tag{19}$$

Für mehr als zwei Faktoren definieren wir rekursiv

$$\begin{aligned} f_1 \otimes_s \cdots \otimes_s f_r &:= (f_1 \otimes_s \cdots \otimes_s f_{r-1}) \otimes_s f_r \\ f_1 \otimes_a \cdots \otimes_a f_r &:= (f_1 \otimes_a \cdots \otimes_a f_{r-1}) \otimes_a f_r \end{aligned} \tag{20}$$

Zum Beispiel ergibt sich dann etwa für 4 Faktoren:

$$\begin{aligned} f_1 \otimes_s f_2 \otimes_s f_3 \otimes_s f_4 &= P_s[\,(f_1 \otimes_s f_2 \otimes_s f_3) \otimes f_4\,] \\ &= P_s\big[\,P_s[\,(f_1 \otimes_s f_2) \otimes f_3\,] \otimes f_4\,\big] \\ &= P_s\Big[\,P_s\big[\,P_s[\,f_1 \otimes f_2\,] \otimes f_3\,\big] \otimes f_4\,\Big] \end{aligned} \tag{21}$$

In dem nächsten Theorem zeigen wir, dass das dasselbe ist wie

$$f_1 \otimes_s f_2 \otimes_s f_3 \otimes_s f_4 \overset{\text{Thm 4.1}}{=} P_s\big[\,f_1 \otimes f_2 \otimes f_3 \otimes f_4\,\big] \tag{22}$$

Insbesondere kann beliebig geklammert werden,

$$(f_1 \otimes_s f_2) \otimes_s (f_3 \otimes_s f_4) = f_1 \otimes_s (f_2 \otimes_s f_3) \otimes_s f_4 = f_1 \otimes_s (f_2 \otimes_s f_3 \otimes_s f_4) \tag{23}$$

Die wesentliche Eigenschaft ist, dass unter einem P_s oder P_a beliebige Subfaktoren f_i durch ein $P_s f_i$ oder $P_a f_i$ ersetzt werden können,

$$\begin{aligned} P_s(f_1 \otimes \cdots \otimes f_i \otimes \cdots \otimes f_r) &= P_s(f_1 \otimes \cdots \otimes P_s f_i \otimes \cdots \otimes f_r) \\ P_a(f_1 \otimes \cdots \otimes f_i \otimes \cdots \otimes f_r) &= P_a(f_1 \otimes \cdots \otimes P_a f_i \otimes \cdots \otimes f_r) \end{aligned} \tag{24}$$

Das folgt im wesentlichen aus dem Teil (b) des folgenden Theorems, da steckt die meiste Arbeit drin.

Theorem 4.1: Wir haben die folgenden Eigenschaften:

a) Für $f \in L^2(\Gamma^n)$ und $g \in L^2(\Gamma^m)$ gilt

$$\begin{aligned} f \otimes_s g &= g \otimes_s f \\ f \otimes_a g &= (-1)^{nm}\, g \otimes_a f \end{aligned} \tag{25}$$

b) Für $f \in L^2(\Gamma^n)$ und $g \in L^2(\Gamma^m)$ gilt

$$\begin{aligned} f \otimes_s (P_s\, g) &= f \otimes_s g \\ f \otimes_a (P_a\, g) &= f \otimes_a g \end{aligned} \tag{26}$$

und

$$f \otimes_s (P_a\, g) = f \otimes_a (P_s\, g) = 0 \tag{27}$$

c) Es seien $f_1 \in L^2(\Gamma^{n_1}), \cdots, f_r \in L^2(\Gamma^{n_r})$. Dann gilt

$$\begin{aligned} f_1 \otimes_s \cdots \otimes_s f_r &= P_s(f_1 \otimes \cdots \otimes f_r) \\ f_1 \otimes_a \cdots \otimes_a f_r &= P_a(f_1 \otimes \cdots \otimes f_r) \end{aligned} \tag{28}$$

d) Für $f_1, ..., f_n \in L^2(\Gamma)$ gilt:

$$(f_1 \otimes_a \cdots \otimes_a f_n)(x_1, \cdots, x_n) = \frac{1}{n!} \det \begin{pmatrix} f_1(x_1) & \cdots & f_1(x_n) \\ \vdots & & \vdots \\ f_n(x_1) & \cdots & f_n(x_n) \end{pmatrix} \tag{29}$$

$$(f_1 \otimes_s \cdots \otimes_s f_n)(x_1, \cdots, x_n) = \frac{1}{n!} \operatorname{per} \begin{pmatrix} f_1(x_1) & \cdots & f_1(x_n) \\ \vdots & & \vdots \\ f_n(x_1) & \cdots & f_n(x_n) \end{pmatrix} \tag{30}$$

mit der Permanente und der Determinante einer Matrix $A = (a_{ij})$,

$$\begin{aligned} \operatorname{per} A &:= \sum_{\pi \in S_n} a_{1,\pi 1} \cdots a_{n,\pi n} \\ \det A &:= \sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sign}\pi \; a_{1,\pi 1} \cdots a_{n,\pi n} \quad . \end{aligned} \tag{31}$$

Beweis: a) Wir beweisen die antisymmetrische Aussage, die symmetrische Aussage folgt dann analog. Es sei $\tau \in S_{n+m}$ die Permutation definiert durch

$$\begin{aligned} \tau 1 &= n+1 \\ &\vdots \\ \tau m &= n+m \\ \tau(m+1) &= 1 \\ &\vdots \\ \tau(m+n) &= n \end{aligned}$$

Dann gilt

$$\operatorname{sign}\tau = (-1)^{nm}$$

und wir können wir schreiben

$$(f \otimes_a g)(x_1, \cdots, x_{n+m}) \;=\; \tfrac{1}{(n+m)!} \sum_{\pi \in S_{n+m}} \mathrm{sign}\pi \; f(x_{\pi 1}, \cdots, x_{\pi n}) \; g(x_{\pi(n+1)}, \cdots, x_{\pi(n+m)})$$

$$= \tfrac{1}{(n+m)!} \sum_{\pi \in S_{n+m}} \mathrm{sign}\pi \; f(x_{\pi\circ\tau(m+1)}, \cdots, x_{\pi\circ\tau(m+n)}) \; g(x_{\pi\circ\tau 1}, \cdots, x_{\pi\circ\tau m})$$

$$= \mathrm{sign}\tau \; \tfrac{1}{(n+m)!} \sum_{\pi \in S_{n+m}} \mathrm{sign}(\pi \circ \tau) \; g(x_{\pi\circ\tau 1}, \cdots, x_{\pi\circ\tau m}) \; f(x_{\pi\circ\tau(m+1)}, \cdots, x_{\pi\circ\tau(m+n)})$$

$$= (-1)^{nm} \; (g \otimes_a f)(x_1, \cdots, x_{n+m})$$

Damit folgt Teil (a).

b) Wir zeigen wieder die antisymmetrische Aussage, die symmetrische Aussage folgt dann analog. Zu zeigen ist

$$P_a(f \otimes P_a\, g) \;=\; P_a(f \otimes g) \tag{32}$$

Wir haben

$$P_a(f \otimes P_a\, g)(x_1, \cdots, x_{n+m}) \;= \tag{33}$$

$$= \tfrac{1}{(n+m)!} \sum_{\pi \in S_{n+m}} \mathrm{sign}\pi \; f(x_{\pi 1}, \cdots, x_{\pi n}) \; (P_a\, g)(x_{\pi(n+1)}, \cdots, x_{\pi(n+m)})$$

Die Summe über alle Permutationen $\pi \in S_{n+m}$ können wir folgendermassen bewerkstelligen: Die Menge $\{1, \cdots, n+m\}$ zerlegen wir zunächst mal in zwei disjunkte Teilmengen mit n und m Elementen,

$$I_{n+m} \;:=\; \{1, \cdots, n+m\} \;=\; \{i_1, \cdots, i_n\} \cup \{j_1, \cdots, j_m\} \tag{34}$$

mit

$$\begin{array}{ccc} i_1 < & \cdots & < i_n \\ j_1 < & \cdots & < j_m \end{array}$$

Dann permutieren wir die i's und die j's mit Permutationen $\sigma \in S_n$ und $\tau \in S_m$. Durch die Wahl der i's sind die j's offensichtlich eindeutig festgelegt. Also, für beliebiges F,

$$\sum_{\pi \in S_{n+m}} F(x_{\pi 1}, \cdots, x_{\pi(n+m)}) \;=\; \sum_{\{i_1, \cdots, i_n\} \subset I_{n+m}} \sum_{\substack{\sigma \in S_n \\ \tau \in S_m}} F(x_{i_{\sigma 1}}, \cdots, x_{i_{\sigma n}}, x_{j_{\tau 1}}, \cdots, x_{j_{\tau m}})$$

Die disjunkte Zerlegung (34) definiert eine eindeutige Permutation und das Signum dieser Permutation bezeichnen wir mit

$$\mathrm{sign}\, i$$

Dann bekommen wir

$$\mathrm{sign}\, \pi \;=\; \mathrm{sign}\, i \; \mathrm{sign}\, \sigma \; \mathrm{sign}\, \tau$$

Also,

$$(n+m)!\;[P_a(f\otimes P_a\,g)](x_1,\cdots,x_{n+m}) \;=$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{\pi\in S_{n+m}} \operatorname{sign}\pi\; f(x_{\pi 1},\cdots,x_{\pi n})\;(P_a\,g)(x_{\pi(n+1)},\cdots,x_{\pi(n+m)})\\
&= \sum_{\{i_1,\cdots,i_n\}}\sum_{\substack{\sigma\in S_n\\ \tau\in S_m}} \operatorname{sign} i\,\operatorname{sign}\sigma\,\operatorname{sign}\tau\; f(x_{i_{\sigma 1}},\cdots,x_{i_{\sigma n}})\;(P_a\,g)(x_{j_{\tau 1}},\cdots,x_{j_{\tau m}})\\
&= \sum_{\{i_1,\cdots,i_n\}}\sum_{\substack{\sigma\in S_n\\ \tau\in S_m}} \operatorname{sign} i\,\operatorname{sign}\sigma\,\operatorname{sign}\tau\; f(x_{i_{\sigma 1}},\cdots,x_{i_{\sigma n}})\;\operatorname{sign}\tau\,(P_a\,g)(x_{j_1},\cdots,x_{j_m})\\
&= m!\sum_{\{i_1,\cdots,i_n\}}\sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sign} i\,\operatorname{sign}\sigma\; f(x_{i_{\sigma 1}},\cdots,x_{i_{\sigma n}})\;(P_a\,g)(x_{j_1},\cdots,x_{j_m})
\end{aligned}$$

Nun ist

$$(P_a\,g)(x_{j_1},\cdots,x_{j_m}) \;=\; \tfrac{1}{m!}\textstyle\sum_{\tau\in S_m}\operatorname{sign}\tau\; g(x_{j_{\tau 1}},\cdots,x_{j_{\tau m}})$$

Wir setzen das ein und bekommen

$$(n+m)!\;[P_a(f\otimes P_a\,g)](x_1,\cdots,x_{n+m}) \;=$$

$$\begin{aligned}
&= m!\sum_{\{i_1,\cdots,i_n\}}\sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sign} i\,\operatorname{sign}\sigma\; f(x_{i_{\sigma 1}},\cdots,x_{i_{\sigma n}})\;(P_a\,g)(x_{j_1},\cdots,x_{j_m})\\
&= \sum_{\{i_1,\cdots,i_n\}}\sum_{\substack{\sigma\in S_n\\ \tau\in S_m}} \operatorname{sign} i\,\operatorname{sign}\sigma\,\operatorname{sign}\tau\; f(x_{i_{\sigma 1}},\cdots,x_{i_{\sigma n}})\;g(x_{j_{\tau 1}},\cdots,x_{j_{\tau m}})\\
&= \sum_{\pi\in S_{n+m+\ell}} \operatorname{sign}\pi\; f(x_{\pi 1},\cdots,x_{\pi n})\;g(x_{\pi(n+1)},\cdots,x_{\pi(n+m)})\\
&= (n+m)!\;\; P_a(f\otimes g)(x_1,\cdots,x_{n+m})
\end{aligned}$$

Damit ist (26) bewiesen. Die Identität (27) folgt dann sofort aus

$$\begin{aligned}
f\otimes_s(P_a\,g) &= P_s[f\otimes(P_a\,g)] \overset{(32)}{=} P_s[f\otimes P_s(P_a\,g)] \overset{P_sP_a=0}{=} 0\\
f\otimes_a(P_s\,g) &= P_a[f\otimes(P_s\,g)] \overset{(32)}{=} P_a[f\otimes P_a(P_s\,g)] \overset{P_aP_s=0}{=} 0
\end{aligned}$$

Damit ist auch der Teil (b) bewiesen.

c) Mit Induktion. Für $r=2$ ist

$$f_1\otimes_a f_2 \;=\; P_a(f_1\otimes f_2)$$

nach Definition von $\otimes_a$. Die Aussage gelte für r. Dann

$$\begin{aligned}
f_1 \otimes_a \cdots \otimes_a f_r \otimes_a f_{r+1} &\overset{\text{Def.}}{=} (f_1 \otimes_a \cdots \otimes_a f_r) \otimes_a f_{r+1} \\
&\overset{\text{Ind.Hyp.}}{=} [P_a(f_1 \otimes \cdots \otimes f_r)] \otimes_a f_{r+1} \\
&\overset{(b)}{=} (f_1 \otimes \cdots \otimes f_r) \otimes_a f_{r+1} \\
&\overset{\text{Def.}}{=} P_a[(f_1 \otimes \cdots \otimes f_r) \otimes f_{r+1}] \\
&= P_a[f_1 \otimes \cdots \otimes f_r \otimes f_{r+1}]
\end{aligned}$$

d) Folgt sofort aus Teil (c) und den Definitionen für die Determinante und die Permanente einer Matrix. ■

Halten wir noch das folgende Resultat aus dem Beweis von Theorem 4.1 fest, wir werden es später noch einmal benutzen:

Lemma 4.1: Es sei $F \in L^2(\Gamma^{n+m})$ eine beliebige Funktion. Dann gilt

$$\sum_{\pi \in S_{n+m}} F(x_{\pi 1}, \cdots, x_{\pi(n+m)}) = \sum_{\{i_1,\cdots,i_n\} \subset I_{n+m}} \sum_{\substack{\sigma \in S_n \\ \tau \in S_m}} F(x_{i_{\sigma 1}}, \cdots, x_{i_{\sigma n}}, x_{j_{\tau 1}}, \cdots, x_{j_{\tau m}}) \tag{35}$$

Dabei sind die i's und j's eine disjunkte Zerlegung der Menge

$$I_{n+m} := \{1, \cdots, n+m\} = \{i_1, \cdots, i_n\} \cup \{j_1, \cdots, j_m\} \tag{36}$$

mit

$$\begin{aligned} i_1 < \cdots < i_n \\ j_1 < \cdots < j_m \end{aligned} \quad ,$$

die j's sind durch die i's eindeutig festgelegt, und für das Signum der Permutation π definiert durch (35) gilt

$$\operatorname{sign} \pi = \operatorname{sign} i \operatorname{sign} \sigma \operatorname{sign} \tau \tag{37}$$

wenn $\operatorname{sign} i$ das Signum der Permutation bezeichnet, die durch die disjunkte Zerlegung (36) definiert wird.

Beispiel: Für eine Funktion $f = f(x)$ von einer Variablen gilt offensichtlich immer

$$f \otimes_a f = - f \otimes_a f \tag{38}$$

und damit

$$f \otimes_a f = 0 \tag{39}$$

Für Funktionen von 2 Variablen $f = f(x_1, x_2)$ muss das antisymmetrische Tensorprodukt $f \otimes_a f$ jedoch nicht notwendig verschwinden. Für die antisymmetrische Funktion von zwei Variablen

$$f(x_1, x_2) \;:=\; x_1 - x_2 \tag{40}$$

findet man etwa (Ü-Blatt 4)

$$\begin{aligned} (f \otimes_a f)(x_1, x_2, x_3, x_4) \;&=\; \\ =\; &\frac{1}{3}\Big\{\, (x_1 - x_2)(x_3 - x_4) \;+\; (x_2 - x_3)(x_1 - x_4) \;+\; (x_3 - x_1)(x_2 - x_4)\,\Big\} \end{aligned} \tag{41}$$

und mit etwas rumprobieren kann man sich davon überzeugen, dass tatsächlich

$$(f \otimes_a f)(x_{\pi 1}, x_{\pi 2}, x_{\pi 3}, x_{\pi 4}) \;=\; \mathrm{sign}\,\pi\; (f \otimes_a f)(x_1, x_2, x_3, x_4) \tag{42}$$

für Permutationen $\pi \in S_4$ erfüllt ist.

Halten wir noch das folgende Lemma fest, was ebenfalls auf dem neuen Übungsblatt 4 bewiesen wird:

Lemma 4.2: a) Für $f, g \in L^2(\Gamma^n)$ gilt:

$$(f, P_s g) \;=\; (P_s f, g) \;=\; (P_s f, P_s g) \tag{43}$$

$$(f, P_a g) \;=\; (P_a f, g) \;=\; (P_a f, P_a g) \tag{44}$$

mit dem Standard-Skalarprodukt $(\,\cdot\,,\,\cdot\,)$ in $L^2(\Gamma^n) = \mathbb{C}^{|\Gamma|^n}$.

b) Für $f_1, ..., f_n \in L^2(\Gamma)$ und $g_1, ..., g_n \in L^2(\Gamma)$ gilt:

$$\big(\, f_1 \otimes \cdots \otimes f_n \,,\, g_1 \otimes \cdots \otimes g_n \,\big) \;=\; (f_1, g_1) \cdots (f_n, g_n) \tag{45}$$

$$\big(\, f_1 \otimes_s \cdots \otimes_s f_n \,,\, g_1 \otimes_s \cdots \otimes_s g_n \,\big) \;=\; \frac{1}{n!}\,\mathrm{per}\big[\, (f_i, g_j)_{1 \le i,j \le n} \,\big] \tag{46}$$

$$\big(\, f_1 \otimes_a \cdots \otimes_a f_n \,,\, g_1 \otimes_a \cdots \otimes_a g_n \,\big) \;=\; \frac{1}{n!}\,\det\big[\, (f_i, g_j)_{1 \le i,j \le n} \,\big] \tag{47}$$

mit der Permanente und der Determinante einer Matrix $A = (a_{ij})$,

$$\begin{aligned} \mathrm{per} A \;&:=\; \sum_{\pi \in S_n} a_{1,\pi 1} \cdots a_{n,\pi n} \\ \det A \;&:=\; \sum_{\pi \in S_n} \mathrm{sign}\pi \; a_{1,\pi 1} \cdots a_{n,\pi n} \end{aligned} \tag{48}$$

Beweis: Übungsblatt 4. ■