week2: Orts- und Impulsraum, Teil1:
Eindimensionaler Fall, d = 1

Wir betrachten ein Ortsraum-Intervall $x \in [-L, L]$ und wollen der Einfachheit halber annehmen, dass das L ganzzahlig ist, $L \in \mathbb{N}$. Wir wollen dieses kontinuierliche Intervall durch ein endliches, diskretes Gitter approximieren. Dazu wählen wir einen Gitterabstand

$$\Delta x \;:=\; \frac{1}{M} \;>\; 0 \tag{1}$$

und wollen ebenfalls der Einfachheit halber annehmen, dass das M ganzzahlig ist, $M \in \mathbb{N}$. Dann diskretisieren wir das Ortsraum-Intervall $x \in [-L, +L]$ gemäss

$$[-L, +L] \;\approx\; [-L, +L]_{\Delta x} \;:=\; \bigl\{ x_{-LM}\,, \cdots, x_{-1}\,, x_0\,, x_1\,, \cdots, x_{LM} \bigr\} \;=\; \{ x_m \} \tag{2}$$

mit

$$x_m \;:=\; \frac{m}{M} \;=\; m\,\Delta x\,, \qquad m \in \{-LM, \cdots, +LM\} \tag{3}$$

Für festes M bekommen wir für $L \to \infty$ den infinite volume limit mit festem Gitterabstand $\Delta x = 1/M > 0$ und für festes L bekommen wir für $M \to \infty$ den continuum limit bei endlichem Volumen $2L < \infty$. Beide Grenzfälle möchte man in der Physik gerne separat betrachten können und mit diesem Setup geht das offensichtlich.

Raum der Einteilchen-Wellenfunktionen

Die Menge aller komplexwertigen Funktionen auf $[-L, +L]_{\Delta x}$ ist gegeben durch

$$\bigl\{ f \;\big|\; f \,:\, [-L, +L]_{\Delta x} \to \mathbb{C} \;\bigr\} \;=\; \bigl\{ f(x_m) \bigr\}_{m=-LM}^{+LM} \;\cong\; \mathbb{C}^{2LM+1} \tag{4}$$

Im Kontinuumslimes $\Delta x \to 0$ sollen das dann die quadratintegrablen Wellenfunktionen aus

$$L^2\bigl([-L, +L]\bigr) \;=\; \bigl\{ f \,:\, [-L, +L] \to \mathbb{C} \;\big|\; \textstyle\int_{-L}^{+L} |f(x)|^2\, dx < \infty \;\bigr\} \tag{5}$$

werden, so dass wir auch im endlich dimensionalen Fall die Notation

$$L^2\bigl([-L, +L]_{\Delta x}\bigr) \;:=\; \bigl\{ f : [-L, +L]_{\Delta x} \to \mathbb{C} \bigr\} \;\cong\; \mathbb{C}^{2LM+1} \tag{6}$$

benutzen wollen, obwohl das L^2 in dem Fall natürlich redundant ist, die Bedingung

$$\sum_{x \in [-L,+L]_{\Delta x}} |f(x)|^2 \;=\; \sum_{m=-LM}^{+LM} |f(x_m)|^2 \;<\; \infty \tag{7}$$

ist immer erfüllt wenn wir nur endlich viele x_m haben.

Vorwärts- und Rückwärts-Ableitung, symmetrische Ableitung

Eine Ortsraum-Ableitung d/dx können wir auf verschiedene Art und Weisen diskretisieren. Es sei

$$f \;:\; [-L,+L] \;\to\; \mathbb{C} \tag{8}$$

eine beliebige Funktion. Dann sind die Vorwärts-Ableitung D_+, die Rückwärts-Ableitung D_- und die symmetrische Ableitung D folgendermassen definiert:

$$(D_+f)(x_m) \;:=\; \frac{f(x_{m+1})-f(x_m)}{x_{m+1}-x_m} \;=\; \frac{f(x_m+\Delta x)-f(x_m)}{\Delta x} \tag{9}$$

$$(D_-f)(x_m) \;:=\; \frac{f(x_m)-f(x_{m-1})}{x_m-x_{m-1}} \;=\; \frac{f(x_m)-f(x_m-\Delta x)}{\Delta x} \tag{10}$$

$$(Df)(x_m) \;:=\; \frac{f(x_{m+1})-f(x_{m-1})}{x_{m+1}-x_{m-1}} \;=\; \frac{f(x_m+\Delta x)-f(x_m-\Delta x)}{2\Delta x} \tag{11}$$

Das gilt zunächst mal nur für die inneren Punkte x_m mit Index $|m| < LM$ so dass auf der rechten Seite von (9-11) alles wohldefiniert ist. Falls $m = \pm ML$ oder $x_m = \pm L$ ist, tauchen auf der rechten Seite von (9-11) die Funktionswerte $f(x_{ML+1}) = f(L+\Delta x)$ und $f(x_{-ML-1}) = f(-L-\Delta x)$ auf, die zunächst mal nicht definiert sind. Wir müssen also sagen, was da konkret für Zahlen genommen werden sollen.

Randbedingungen

Wenn wir etwa ein Elektron in einem Kasten $[-L,+L]$ beschreiben wollen, ist es plausibel anzunehmen, dass die Wellenfunktion am Rand und ausserhalb des Intervalls $[-L,+L]$ verschwinden tut, also $f(x) = 0$ für $|x| > L$. Im kontinuierlichen Fall macht es keinen Unterschied, ob wir $|x| > L$ oder $|x| \geq L$ schreiben wenn wir stetige Funtionen voraussetzen. Im diskreten Fall macht das einen Unterschied; damit das $L^2\big([-L,+L]_{\Delta x}\big)$ keine überflüssigen Komponenten enthält, definieren wir die Dirichlet-Randbedingungen durch

$$f(x_m) \;:=\; 0 \quad \forall\, |m| > LM \qquad \text{(Dirichlet Randbedingungen)} \tag{12}$$

Neben Dirichlet-Randbedingungen betrachtet man typischerweise, im wesentlichen aus rechentechnischen Gründen, periodische Randbedingungen. Im kontinuierlichen Fall sind die definiert durch $f(+L) = f(-L)$ oder allgemeiner durch $f(x+2L) = f(x)$. Wiederum, da wir keine redundanten Komponenten in unserem $L^2\big([-L,+L]_{\Delta x}\big) \cong \mathbb{C}^{2LM+1}$ haben wollen, definieren wir im diskreten Fall

$$f(x_{+LM+1}) \;:=\; f(x_{-LM}) \tag{13}$$

$$f(x_{-LM-1}) \;:=\; f(x_{+LM}) \qquad \text{(periodische Randbedingungen)} \tag{14}$$

oder allgemeiner, für $x \in [-L,+L]_{\Delta x}$,

$$f(x+2L+\Delta x) \;:=\; f(x) \qquad \text{(periodische Randbedingungen)} \tag{15}$$

Also wir fordern nicht etwa $f(x_{+LM}) = f(x_{-LM})$, dann wäre der Grundraum kein $\mathbb{C}^{2LM+1}$ mehr, sondern diese beiden Koordinaten können unabhängig voneinander frei gewählt werden.

Matrix-Darstellungen für die diskreten Ableitungen

Wir benutzen den Index 'dc' für 'Dirichlet (boundary) conditions' und 'pc' für periodic boundary conditions. Weiterhin wollen wir für den Moment

$$N \quad := \quad LM \tag{16}$$

abkürzen (das ist hier jetzt also keine Teilchenzahl in einem N-Teilchensystem). Dann haben wir die folgenden Matrix-Darstellungen für die diskretisierten Ableitungen. Mit periodischen Randbedingungen,

$$D_+^{pc} \quad = \quad \frac{1}{\Delta x} \begin{pmatrix} -1 & +1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & +1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & \ddots & -1 & +1 \\ +1 & 0 & \cdots & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \in \quad \mathbb{C}^{(2N+1)\times(2N+1)} \tag{17}$$

$$D_-^{pc} \quad = \quad \frac{1}{\Delta x} \begin{pmatrix} +1 & 0 & \cdots & 0 & -1 \\ -1 & +1 & 0 & & 0 \\ 0 & -1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & +1 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & +1 \end{pmatrix} \quad \in \quad \mathbb{C}^{(2N+1)\times(2N+1)} \tag{18}$$

$$D_{pc} \quad = \quad \frac{1}{2\Delta x} \begin{pmatrix} 0 & +1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & +1 & \ddots & 0 \\ 0 & -1 & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 & +1 \\ +1 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad = \quad \frac{1}{2} \left(D_+^{pc} \; + \; D_-^{pc} \right) \tag{19}$$

Und mit Dirichlet-Randbedingungen,

$$D_+^{dc} \quad = \quad \frac{1}{\Delta x} \begin{pmatrix} -1 & +1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & +1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & \ddots & -1 & +1 \\ \mathbf{0} & 0 & \cdots & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \in \quad \mathbb{C}^{(2N+1)\times(2N+1)} \tag{20}$$

$$D_-^{dc} \quad = \quad \frac{1}{\Delta x} \begin{pmatrix} +1 & 0 & \cdots & 0 & \mathbf{0} \\ -1 & +1 & 0 & & 0 \\ 0 & -1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & +1 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & +1 \end{pmatrix} \quad \in \quad \mathbb{C}^{(2N+1)\times(2N+1)} \tag{21}$$

$$D_{dc} \quad = \quad \frac{1}{2\Delta x} \begin{pmatrix} 0 & +1 & 0 & 0 & \mathbf{0} \\ -1 & 0 & +1 & \ddots & 0 \\ 0 & -1 & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 & +1 \\ \mathbf{0} & 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad = \quad \frac{1}{2}\,(\,D_+^{dc} \;+\; D_-^{dc}\,) \tag{22}$$

In beiden Fällen sind das also $(2N+1) \times (2N+1)$ Matrizen und in beiden Fällen ist der Grundraum, auf den diese Ableitungen wirken, derselbe, nämlich

$$L^2\big(\,[-L,+L]_{\Delta x}\,\big) \quad \cong \quad \mathbb{C}^{2N+1} \tag{23}$$

mit Dimension $2N+1$.

Hamilton-Operator für die kinetische Energie

Die kinetische Energie ist klassisch

$$H_{\rm kin} \quad = \quad \tfrac{m}{2}\,v^2 \quad = \quad \tfrac{p^2}{2m} \tag{24}$$

mit dem linearen eindimensionalen Impuls $p = mv$. In der Quantenmechanik muss der Impuls durch den Impuls-Operator ersetzt werden, das ist gerade eine Ableitung:

$$p \quad \stackrel{\rm QM}{\to} \quad \hat{p} \quad = \quad \tfrac{\hbar}{i}\,\tfrac{d}{dx} \tag{25}$$

Das liefert dann den Hamilton-Operator für die kinetische Energie

$$\hat{H}_{\rm kin} \quad = \quad \tfrac{\hat{p}^2}{2m} \quad = \quad -\,\tfrac{\hbar^2}{2m}\,\tfrac{d^2}{dx^2} \tag{26}$$

Wenn wir das diskretisieren, müssen wir sagen, welche Randbedingungen wir nehmen wollen. Auf den ersten Blick würde man da Dirichlet-Randbedingungen als die natürliche Wahl ansehen wollen. Das macht man jedoch nicht aus folgendem Grund: Wenn wir Dinge berechnen wollen, ist es günstig in einer Basis zu rechnen, in der das $\hat{H}_{\rm kin}$ diagonal ist. Bei periodischen Randbedingungen, betrachten wir gleich weiter unten, ist eine Basis aus Eigenfunktionen gerade gegeben durch die ebenen Wellen

$$f_k(x) \quad = \quad e^{\,i\,k\,x} \tag{27}$$

und die haben eine unmittelbare physikalisch intuitive Bedeutung: Bewegt sich ein Elektron mit Impuls $p = \hbar k$ oder mit Geschwindigkeit $v = p/m = \hbar k/m$ in Richtung der positiven x-Achse, dann wird es beschrieben durch eine solche ebene Welle e^{ikx}. Wenn wir Dirichlet-Randbedingungen wählen würden, würden wir auf das Intervall $[-L,+L]$ lokalisierte Wellenzüge als Eigenfunktionen erzwingen, die weniger intuitiv und analytisch aufwändiger sind, wir schauen uns das dann auf dem neuen Übungsblatt ein bischen genauer an.

Eigenwerte und Eigenfunktionen von D_+, D_- und D bei periodischen Randbedingungen

Wir machen den Ansatz

$$f(x_m) \quad = \quad e^{ikx_m} \quad =: \quad f_k(x_m) \tag{28}$$

mit einem noch zu bestimmenden k. Das k hat dann die Bedeutung einer Wellenzahl, das ist 2π durch Wellenlänge, und wenn man die mit $\hbar$ multipliziert, hat das nach der de Broglie Beziehung $p = h/\lambda = h/(2\pi) \cdot (2\pi)/\lambda = \hbar \cdot k$ die Bedeutung von Impuls. Diese k's, die wir jetzt also bestimmen werden, bilden dann den Impulsraum, der wird dann genauso viel Punkte haben wie der Ortsraum, $2N + 1$ Stück.

Für $|m| < LM = N$ bekommen wir

$$(D_+ f_k)(x_m) \quad = \quad \tfrac{f_k(x_m+\Delta x) - f_k(x_m)}{\Delta x} \quad = \quad \tfrac{e^{+ik\Delta x}-1}{\Delta x}\, e^{ikx_m} \quad =: \quad \lambda_k^+ \, f_k(x_m) \tag{29}$$

$$(D_- f_k)(x_m) \quad = \quad \tfrac{f_k(x_m) - f_k(x_m-\Delta x)}{\Delta x} \quad = \quad \tfrac{1-e^{-ik\Delta x}}{\Delta x}\, e^{ikx_m} \quad =: \quad \lambda_k^- \, f_k(x_m) \tag{30}$$

$$(D f_k)(x_m) \quad = \quad \tfrac{f_k(x_m+\Delta x) - f_k(x_m-\Delta x)}{2\Delta x} \quad = \quad \tfrac{e^{+ik\Delta x}-e^{-ik\Delta x}}{2\Delta x}\, e^{ikx_m} \quad =: \quad \lambda_k \, f_k(x_m) \tag{31}$$

mit

$$\lambda_k^+ \quad = \quad \tfrac{e^{+ik\Delta x}-1}{\Delta x} \tag{32}$$

$$\lambda_k^- \quad = \quad \tfrac{1-e^{-ik\Delta x}}{\Delta x} \tag{33}$$

$$\lambda_k \quad = \quad \tfrac{e^{+ik\Delta x}-e^{-ik\Delta x}}{2\Delta x} \quad = \quad i\, \tfrac{\sin(k\Delta x)}{\Delta x} \tag{34}$$

Damit man für die Ableitungen an den Randpunkten $x_{\pm N} = x_{\pm ML} = \pm ML/M = \pm L$ genau dieselben λ's bekommt, müssen die f_k's genau den periodischen Randbedingungen (13,14) genügen. Das heisst,

$$f_k(+L + \Delta x) \quad \overset{!}{=} \quad f_k(-L) \tag{35}$$

$$f_k(-L - \Delta x) \quad \overset{!}{=} \quad f_k(+L) \tag{36}$$

oder

$$e^{+ik(L+\Delta x)} \quad = \quad e^{-ikL} \tag{37}$$

$$e^{-ik(L+\Delta x)} \quad = \quad e^{+ikL} \tag{38}$$

Die zweite Gleichung ist gerade das komplex konjugierte der ersten Gleichung, also redundant, und die erste Gleichung (37) liefert

$$e^{ik(\Delta x+2L)} \quad = \quad 1 \tag{39}$$

Das bedeutet

$$k(\Delta x + 2L) \quad = \quad 2\pi j\,, \qquad j \in \mathbb{Z} \tag{40}$$

oder mit $\Delta x = 1/M$,

$$k \;=\; k_j \;=\; 2\pi\,\frac{j}{\frac{1}{M}+2L} \;=\; 2\pi\,\frac{jM}{2LM+1} \;=\; 2\pi\,\frac{jM}{2N+1} \tag{41}$$

Die Eigenfunktionen sind dann, wenn wir für den Moment das j anstatt das k_j als Index wählen,

$$f_j(x_m) \;=\; e^{ik_jx_m} \;=\; e^{i\,2\pi\,\frac{jM}{2N+1}\,\frac{m}{M}} \;=\; e^{i\,2\pi\,\frac{jm}{2N+1}} \tag{42}$$

Da m ganzzahlig ist, gilt offensichtlich

$$f_{j+2N+1}(x_m) \;=\; e^{i\,2\pi\,\frac{(j+2N+1)m}{2N+1}} \;=\; e^{i\,2\pi\,\frac{jm}{2N+1}}\times e^{i\,2\pi\,m} \;=\; e^{i\,2\pi\,\frac{jm}{2N+1}} \;=\; f_j(x_m) \tag{43}$$

und es kommen nur $2N+1$ verschiedene j-Werte in Frage, wir wählen

$$j \;\in\; \{-N,\cdots,+N\} \tag{44}$$

Die k_j nehmen dann die folgenden Werte an:

$$k_j \;=\; 2\pi M\,\frac{j}{2N+1}$$

$$\Rightarrow \qquad k_j \;\in\; \left\{k_{-N}\,,\,\cdots\,,\,k_{-1}\,,\,k_0\,,\,k_{+1}\,,\,\cdots\,,\,k_{+N}\right\} \;\subset\; [-\pi M,+\pi M] \tag{45}$$

mit $k_0 = 0$ und

$$k_{\pm N} \;=\; \pm\,2\pi M\,\frac{N}{2N+1} \;\overset{L\to\infty}{\to}\; \pm\pi\,M \;=\; \pm\,\frac{\pi}{\Delta x} \tag{46}$$

Der Abstand zwischen zwei k_j's ist

$$k_{j+1}-k_j \;=\; 2\pi M\,\frac{1}{2N+1} \;=\; \frac{2\pi}{2L+1/M} \;=:\; \Delta k \tag{47}$$

Im Kontinuumslimes $\Delta x \to 0$ oder $M \to \infty$ wird das zu

$$\Delta k \;\overset{\Delta x\to 0}{\to}\; \frac{2\pi}{2L} \tag{48}$$

Schreiben wir noch die normierten Eigenfunktionen hin: Für $j,\ell \in \{-N,\cdots,+N\}$ bekommen wir die Skalarprodukte

$$(f_j,f_\ell) \;=\; \sum_{m=-N}^{N}\overline{f_j(x_m)}\,f_\ell(x_m) \;=\; \sum_{m=-N}^{N} e^{-ik_jx_m}\,e^{+ik_\ell x_m} \;=\; \sum_{m=-N}^{N} e^{-i(k_j-k_\ell)x_m} \tag{49}$$

Mit

$$(k_j-k_\ell)x_m \;=\; 2\pi M\,\frac{j-\ell}{2N+1}\,\frac{m}{M} \;=\; 2\pi\,\frac{(j-\ell)m}{2N+1} \tag{50}$$

folgt dann

$$(f_j, f_\ell) \;=\; \sum_{m=-N}^{N} e^{-i\,2\pi\,\frac{(j-\ell)m}{2N+1}} \;=\; (2N+1) \times \delta_{j,\ell} \tag{51}$$

Also sind die normierten Eigenfunktionen gegeben durch

$$e_{k_j}(x_m) \;:=\; \tfrac{1}{\sqrt{2N+1}} \times e^{ik_j x_m} \tag{52}$$

mit $N = ML$,

$$x_m \;=\; m\,\Delta x \;=\; \frac{m}{M} \tag{53}$$

$$k_j \;=\; j\,\Delta k \;=\; \frac{2\pi\,j}{2L+1/M} \tag{54}$$

$$-N \;=\; -ML \;\le\; m, j \;\le\; +ML \;=\; +N \tag{55}$$

Fassen wir die Ergebnisse in dem folgenden Theorem zusammen:

Theorem 2.1: Ortsraum $\{x_m\}_{m=-N}^{N}$ und Impulsraum $\{k_j\}_{j=-N}^{N}$ seien gegeben durch (53-55). Dann bilden die $2N+1$ Funktionen oder Vektoren

$$e_{k_j}(x_m) \;=\; \tfrac{1}{\sqrt{2N+1}}\; e^{i\,k_j\,x_m} \tag{56}$$

eine Orthonormalbasis des $\mathbb{C}^{2N+1}$, es gilt mit dem Standardskalarprodukt $(\cdot,\cdot)$ im $\mathbb{C}^{2N+1}$

$$(e_{k_r}, e_{k_s}) \;=\; \sum_{m=-N}^{N} \bar{e}_{k_r}(x_m)\, e_{k_s}(x_m) \;=\; \delta_{k_r,k_s} \tag{57}$$

Weiterhin gelten die Vollständigkeitsrelationen

$$\sum_{j=-N}^{N} e_{k_j}(x_\ell)\, \bar{e}_{k_j}(x_m) \;=\; \delta_{x_\ell, x_m} \tag{58}$$

Die e_{k_j} sind Eigenfunktionen für die diskretisierten Ableitungen mit periodischen Randbedingungen, es gilt insbesondere für die symmetrische diskrete Ableitung D_{pc} gegeben durch (19)

$$D_{pc}\, e_{k_j} \;=\; \lambda_{k_j}\, e_{k_j} \tag{59}$$

mit den Eigenwerten

$$\lambda_{k_j} \;=\; i\,\tfrac{\sin(k_j \Delta x)}{\Delta x} \;\overset{\Delta x \to 0}{\to}\; i\,k_j \;=\; i\,\tfrac{2\pi j}{2L}\,, \quad j \in \mathbb{Z} \tag{60}$$

und die e_{k_j} sind $(2L+\Delta x)$-periodische Funktionen, es gilt $e_{k_j}(x_m + 2L + \Delta x) = e_{k_j}(x_m)$. Für den Normierungsfaktor $1/\sqrt{2N+1}$ gilt die Beziehung

$$\frac{1}{2N+1} \;=\; \frac{\Delta x\,\Delta k}{2\pi} \tag{61}$$

mit

$$\begin{aligned}
\Delta x &= x_{m+1} - x_m = \tfrac{m+1}{M} - \tfrac{m}{M} = \tfrac{1}{M} \\
\Delta k &= k_{j+1} - k_j = \tfrac{2\pi\,(j+1)}{2L+1/M} - \tfrac{2\pi\, j}{2L+1/M} = \tfrac{2\pi}{2L+1/M} \quad .
\end{aligned} \tag{62}$$

Kontinuumslimes und Infinite Volume Limit

Schauen wir uns noch die Grenzfälle $\Delta x \to 0$ und $L \to \infty$ an. Die Vollständigkeitsrelationen (58) sehen so aus:

$$\tfrac{1}{2N+1} \sum_{j=-N}^{N} e^{ik_j(x_\ell - x_m)} = \Delta x \sum_{j=-N}^{N} \tfrac{\Delta k}{2\pi}\, e^{ik_j(x_\ell - x_m)} = \delta_{x_\ell, x_m} \tag{63}$$

oder

$$\sum_{j=-N}^{N} \tfrac{\Delta k}{2\pi}\, e^{ik_j(x_\ell - x_m)} = \tfrac{1}{\Delta x}\, \delta_{x_\ell, x_m} \tag{64}$$

Im Limes $\Delta x \to 0$ definiert die rechte Seite von (64) eine sogenannte δ-Distribution, man schreibt

$$\lim_{\Delta x \to 0} \tfrac{1}{\Delta x}\, \delta_{x_\ell, x_m} = \delta(x_\ell - x_m) \tag{65}$$

Auf der linken Seite von (64) geht das $N = ML = L/\Delta x$ nach unendlich, und die k_j sind gegeben durch

$$k_j \overset{\Delta x \to 0}{=} \tfrac{2\pi j}{2L} \tag{66}$$

Wir haben dann, mit $x = x_\ell$ und $y = x_m$,

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} \tfrac{\Delta k}{2\pi}\, e^{ik_j(x-y)} = \delta(x-y) \quad , \qquad x, y \in [-L, +L] \tag{67}$$

Und im Limes Volumen nach unendlich, $L \to \infty$, ist die j oder k_j-Summe auf der linken Seite von (67) eine Riemannsche Summe für ein k-Integral und wir bekommen

$$\int_{-\infty}^{\infty} \tfrac{dk}{2\pi}\, e^{ik(x-y)} = \delta(x-y) \quad , \qquad x, y \in (-\infty, +\infty) \tag{68}$$