Hochschule RheinMain SS 2023
Prof. Dr. D. Lehmann

9. Übungsblatt zur Vorlesung
Mathematische Methoden in der Quantenmechanik

Aufgabe 1: Für einen gegebenen symmetrischen oder antisymmetrischen n-Teilchen Zustand $\psi = \psi_{s/a}(x_1, \cdots, x_n) \in L^2_{s/a}(\Gamma^n)$ hatten wir die reduzierte 1-Teilchen Dichte-Funktion $\rho_\psi(x,y)$ definiert durch

$$\rho_\psi(x,y) \;:=\; \sum_{x_2,\cdots,x_n\in\Gamma} \bar{\psi}(x,x_2,\cdots,x_n)\,\psi(y,x_2,\cdots,x_n)$$

Wir wählen jetzt die Standard-Basis von $L^2(\Gamma) = \mathbb{C}^{|\Gamma|}$ als ONB, also

$$B \;:=\; \left\{\, e_x \;=\; e_x(x') \;:=\; \delta_{x,x'} \;\mid\; x \in \Gamma \,\right\}$$

und definieren die Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren a_x^+, a_x und c_x^+, c_x wie in der Definition 8.1 im week8. Zeigen Sie:

$$\begin{aligned} \rho_{\psi_s}(x,y) &= \frac{1}{n}\left(\psi_s\,,\, a_x^+ a_y\,\psi_s\right) \\ \rho_{\psi_a}(x,y) &= \frac{1}{n}\left(\psi_a\,,\, c_x^+ c_y\,\psi_a\right)\;. \end{aligned}$$

Aufgabe 2: Es seien $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ beliebige komplexe $n\times n$ Matrizen. Wir definieren die lineare Abbildung

$$L_A \;:\; \mathbb{C}^{n\times n} \to \mathbb{C}^{n\times n}$$

durch

$$L_A(B) \;:=\; [A,B] \;=\; AB - BA\;.$$

Beweisen Sie: Für beliebiges $t \in \mathbb{R}$ gilt

$$e^{tA}\,B\,e^{-tA} \;=\; e^{tL_A}\,B \tag{1}$$

Zeigen Sie dazu, dass die Matrix $M_t := e^{tA}\,B\,e^{-tA}$, das ist die linke Seite von (1), die Differentialgleichung

$$\tfrac{d}{dt}M_t \;=\; L_A\,M_t$$

erfüllt. Da die linke und die rechte Seite von (1) bei Zeit $t=0$ übereinstimmen, folgt daraus dann die Gleichheit für alle t.

Aufgabe 3: Es seien $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ beliebige komplexe $n \times n$ Matrizen und es gelte

$$\big[\, A\,,\, [A,B]\,\big] \;=\; \big[\, B\,,\, [A,B]\,\big] \;=\; 0 \tag{2}$$

Beweisen Sie die einfache Version der Baker-Campbell-Hausdorff Formel: Für beliebiges $t \in \mathbb{R}$ gilt

$$e^{t(A+B)} \;=\; e^{tA}\, e^{tB}\, e^{-\frac{t^2}{2}[A,B]} \tag{3}$$

Zeigen Sie dazu, dass die Matrix $M_t := e^{tA}\, e^{tB}\, e^{-\frac{t^2}{2}[A,B]}$, das ist die rechte Seite von (3), die Differentialgleichung

$$\tfrac{d}{dt} M_t \;=\; (A+B)\, M_t \tag{4}$$

erfüllt. Da die linke und die rechte Seite von (3) bei Zeit $t = 0$ übereinstimmen, folgt daraus dann die Gleichheit für alle t. Zum Beweis von (4) benötigen Sie die Formel (1) aus Aufgabe 2 und Sie müssen beim Evaluieren von $e^{tL_A}B$ oder analogen Ausdrücken die Annahmen (2) verwenden.