8. Übungsblatt zur Vorlesung
Mathematische Methoden in der Quantenmechanik

Aufgabe 1: Es seien a_α^+, a_α die bosonischen Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren und c_α^+, c_α die fermionischen Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren aus dem week8.pdf.

a) Es sei $F_n \in L^2_s(\Gamma^n)$ eine beliebige symmetrische n-Teilchen Wellenfunktion. Zeigen Sie die folgenden Identitäten:

$$\begin{aligned}(a_\alpha a_\beta^+ F_n)(x_1, \cdots, x_n) &= (e_\alpha, e_\beta)\, F_n(x_1, \cdots, x_n) \; + \\ &\quad \sum_{x_0 \in \Gamma} \bar{e}_\alpha(x_0) \sum_{i=1}^n e_\beta(x_i)\, F_n(x_0, x_1, \cdots, \widehat{x_i}, \cdots, x_n) \\ (a_\beta^+ a_\alpha F_n)(x_1, \cdots, x_n) &= \sum_{i=1}^n e_\beta(x_i) \sum_{x_0 \in \Gamma} \bar{e}_\alpha(x_0)\, F_n(x_0, x_1, \cdots, \widehat{x_i}, \cdots, x_n)\end{aligned}$$

Insbesondere,

$$[a_\alpha, a_\beta^+] \;:=\; a_\alpha a_\beta^+ \,-\, a_\beta^+ a_\alpha \;=\; (e_\alpha, e_\beta)\, Id \;=\; \delta_{\alpha,\beta}\, Id \;.$$

b) Es sei jetzt $G_n \in L^2_a(\Gamma^n)$ eine beliebige antisymmetrische n-Teilchen Wellenfunktion. Zeigen Sie die folgenden Identitäten:

$$\begin{aligned}(c_\alpha c_\beta^+ G_n)(x_1, \cdots, x_n) &= (e_\alpha, e_\beta)\, G_n(x_1, \cdots, x_n) \; + \\ &\quad \sum_{x_0 \in \Gamma} \bar{e}_\alpha(x_0) \sum_{i=1}^n (-1)^i\, e_\beta(x_i)\, G_n(x_0, x_1, \cdots, \widehat{x_i}, \cdots, x_n) \\ (c_\beta^+ c_\alpha G_n)(x_1, \cdots, x_n) &= \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1}\, e_\beta(x_i) \sum_{x_0 \in \Gamma} \bar{e}_\alpha(x_0)\, G_n(x_0, x_1, \cdots, \widehat{x_i}, \cdots, x_n)\end{aligned}$$

Insbesondere,

$$\{c_\alpha, c_\beta^+\} \;:=\; c_\alpha c_\beta^+ \,+\, c_\beta^+ c_\alpha \;=\; (e_\alpha, e_\beta)\, Id \;=\; \delta_{\alpha,\beta}\, Id \;.$$

Benutzen Sie dazu die Definition 8.1, das Lemma 8.1 und die Formeln für die Wirkungsweise der Vernichtungsoperatoren a_α, c_α aus dem Teil (a) des Theorems 8.1.

Aufgabe 2: Zeigen Sie mit Hilfe der Formeln aus Aufgabe 1: Für beliebige $F_n \in L^2_s(\Gamma^n)$ und $G_n \in L^2_a(\Gamma^n)$ gilt

$$\begin{aligned}(a_\beta^+ a_\alpha F_n)(x_1, \cdots, x_n) &= \sum_{i=1}^n \sum_{y_i \in \Gamma} e_\beta(x_i)\, \bar{e}_\alpha(y_i)\, F_n(x_1, \cdots, x_{i-1}, y_i, x_{i+1}, \cdots, x_n) \\ (c_\beta^+ c_\alpha G_n)(x_1, \cdots, x_n) &= \sum_{i=1}^n \sum_{y_i \in \Gamma} e_\beta(x_i)\, \bar{e}_\alpha(y_i)\, G_n(x_1, \cdots, x_{i-1}, y_i, x_{i+1}, \cdots, x_n)\end{aligned}$$

Insbesondere,

$$\sum_\alpha a_\alpha^+ a_\alpha \;\; = \;\; \sum_\alpha c_\alpha^+ c_\alpha \;\; = \;\; \hat{n}$$

mit dem Teilchenzahl-Operator

$$(\,\hat{n}\,f_n\,)(x_1, \cdots, x_n) \;\; := \;\; n\,f_n(x_1, \cdots, x_n) \;\; .$$