Hochschule RheinMain | SS 2023
Prof. Dr. D. Lehmann

7. Übungsblatt zur Vorlesung
Mathematische Methoden in der Quantenmechanik

Aufgabe 1: Kupfer hat mit 29 Protonen im Kern die Elektronenkonfiguration $[\mathrm{Ar}]\,3\mathrm{d}^{10}\,4\mathrm{s}^1$. Dabei steht [Ar] für die Elektronenkonfiguration von Argon, was als Edelgas abgeschlossene $3s$ und $3p$ Orbitale hat, $[\mathrm{Ar}] = [\mathrm{Ne}]\,3\mathrm{s}^2\,3\mathrm{p}^6$. Kupfer hat also eine abgeschlossene erste, zweite und dritte Schale und genau ein Elektron auf der 4. Schale, dieses Elektron steht dann für den elektrischen Ladungstransport zur Verfügung. Weiterhin hat Kupfer eine Massendichte von

$$\rho_{\mathrm{mass}} \;=\; 8.92\,\tfrac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^3}$$

und eine atomare Masse von (Mischung von 2 Isotopen)

$$m_{\mathrm{atom}} \;=\; 63.55\,\mathrm{u}$$

Ausgestattet mit diesen Informationen, verifizieren Sie die numerischen Werte für die Elektronenkonzentration n, die Fermi-Energie ε_F, die Fermi-Geschwindigkeit $v_F = \hbar k_F/m$ und die Fermi-Temperatur $T_F = \varepsilon_F/k_B$ von Kupfer wie sie in der Tabelle 1 auf Seite 5 in dem week7 angegeben sind.

Aufgabe 2: Für ein vorgegebenes (Impuls , Spin) - Paar $(k,\sigma) \in \Gamma_k \times \{\uparrow,\downarrow\} =: \Gamma_{k,s}$ betrachten wir die folgenden grosskanonischen Zustandssummen für das ideales Fermi-Gas,

$$\begin{aligned} Z_{k\sigma}(z) \;&:=\; \sum_{N=1}^{\infty} z^N \sum_{\{n_{q\tau}\}\in I_N} n_{k\sigma}\; e^{-\beta\sum_{q\tau} n_{q\tau}\,\varepsilon_q} \\ Z(z) \;&:=\; \sum_{N=0}^{\infty} z^N \sum_{\{n_{q\tau}\}\in I_N} e^{-\beta\sum_{q\tau} n_{q\tau}\,\varepsilon_k} \end{aligned}$$

mit der Menge der fermionischen Besetzungszahlen

$$I_N \;:=\; \Big\{\, \{\,n_{q\tau}\,\}_{(q,\tau)\in\Gamma_{k,s}} \,\in \{\,0\,,\,1\,\}^{\,|\Gamma_{k,s}|} \;\Big|\; \textstyle\sum_{q,\tau} n_{q\tau} \;=\; N \,\Big\}$$

Zeigen Sie die folgenden Identitäten:

$$\begin{aligned} Z_{k\sigma}(z) \;&=\; z\,e^{-\beta\,\varepsilon_k} \prod_{q\tau\neq k\sigma} (1 \,+\, z\,e^{-\beta\,\varepsilon_q}) \\ Z(z) \;&=\; \prod_{q\tau} (1 \,+\, z\,e^{-\beta\,\varepsilon_q}) \end{aligned}$$

Insbesondere,

$$\langle n_{k\sigma}\rangle_\beta(z) \;:=\; \frac{Z_{k\sigma}(z)}{Z(z)} \;=\; \frac{z\,e^{-\beta\,\varepsilon_k}}{1 \,+\, z\,e^{-\beta\,\varepsilon_k}} \;\stackrel{z=e^{\beta\mu}}{=}\; \frac{1}{e^{\beta\,(\varepsilon_k-\mu)} \,+\, 1}$$

Schauen Sie sich dazu gegebenenfalls noch einmal die analogen Rechnungen für das ideale Bose-Gas in dem week6.pdf an.