5. Übungsblatt zur Vorlesung
Mathematische Methoden in der Quantenmechanik

Aufgabe 1: Es seien $f_1, ..., f_n \in L^2(\Gamma)$. Zeigen Sie die folgenden Identitäten:

$$
\begin{aligned}
(f_1 \otimes_s \cdots \otimes_s f_n)(y, x_2, \cdots, x_n) &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} f_i(y)\ (f_1 \otimes_s \cdots \widehat{f_i} \cdots \otimes_s f_n)(x_2, \cdots, x_n) \\
(f_1 \otimes_a \cdots \otimes_a f_n)(y, x_2, \cdots, x_n) &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} f_i(y)\ (f_1 \otimes_a \cdots \widehat{f_i} \cdots \otimes_a f_n)(x_2, \cdots, x_n)
\end{aligned}
$$

wobei das $\widehat{\cdot}$ meint, dass dieser Faktor wegzulassen ist. Schauen Sie sich dazu etwa noch einmal die Lösung der 2.Aufgabe vom Übungsblatt 4 an und verwenden Sie wieder das Lemma 4.1 aus dem week4.pdf.

Aufgabe 2: Für einen beliebigen n-Teilchen-Zustand $\psi = \psi(x_1, \cdots, x_n) \in L^2(\Gamma^n)$ ist die reduzierte Ein-Teilchen Dichte-Funktion $\rho_\psi(x, y)$ definiert durch

$$
\rho_\psi(x, y) \;:=\; \textstyle\sum_{x_2, \cdots, x_n \in \Gamma_x} \bar{\psi}(x, x_2, \cdots, x_n)\, \psi(y, x_2, \cdots, x_n) \tag{1}
$$

Wir betrachten die folgenden normierten symmetrischen und antisymmetrischen n-Teilchen Zustände

$$
\begin{aligned}
\psi^s_{\{n_k\}} &:= \sqrt{c_{k_1 \cdots k_n}}\ e_{k_1} \otimes_s \cdots \otimes_s e_{k_n} \\
\psi^a_{\{n_k\}} &:= \sqrt{c_{k_1 \cdots k_n}}\ e_{k_1} \otimes_a \cdots \otimes_a e_{k_n}
\end{aligned}
$$

mit den Besetzungszahlen

$$
n_k \;:=\; \text{Anzahl von } k_r \text{ in } \{k_1, \cdots, k_n\} \text{ mit } k_r = k
$$

und dem Normierungsfaktor

$$
c_{k_1 \cdots k_n} \;=\; \frac{n!}{\prod_k n_k!}
$$

der im fermionischen Fall einfach $c_{k_1 \cdots k_n} = n!$ ist, da in dem Fall die $n_k \in \{0, 1\}$ sein müssen. Die reduzierten Ein-Teilchen Dichte-Funktionen für diese beiden Zustände seien mit $\rho^s_{\{n_k\}}$ und $\rho^a_{\{n_k\}}$ bezeichnet. Zeigen Sie: Sowohl im bosonischen als auch im fermionischen Fall bekommen wir die Darstellung

$$
\rho^s_{\{n_k\}}(x, y) \;=\; \rho^a_{\{n_k\}}(x, y) \;=\; \rho_{\{n_k\}}(x, y)
$$

mit der Dichte-Funktion

$$\begin{aligned} \rho_{\{n_k\}}(x,y) &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \bar{e}_{k_i}(x)\, e_{k_i}(y) \\ &= \sum_{k\in\Gamma_k} \frac{n_k}{n}\, \bar{e}_k(x)\, e_k(y) \\ &= (\Delta x)^d \sum_{k\in\Gamma_k} \tfrac{(\Delta k)^d}{(2\pi)^d}\, \frac{n_k}{n}\, e^{-\,i\,k(x-y)} \end{aligned} \tag{2}$$

Überprüfen Sie, dass tatsächlich die Identität (folgt sofort aus (1) falls das ψ normiert ist)

$$\sum_{x\in\Gamma_x} \rho_{\{n_k\}}(x,x) = 1$$

erfüllt ist.

In beiden Fällen erhalten wir also den gleichen analytischen Ausdruck, der einzige Unterschied, der dann aber einen grossen Impact hat, besteht in den möglichen Werten für die Besetzungszahlen $\{n_k\}: \; n_k \in \{0,1,2,\cdots,n \sim 10^{23}\}$ im bosonischen, im symmetrischen Fall und $n_k \in \{0,1\}$ im fermionischen, im antisymmetrischen Fall.