Hochschule RheinMain SS 2023
Prof. Dr. D. Lehmann

4. Übungsblatt zur Vorlesung
Mathematische Methoden in der Quantenmechanik

Aufgabe 1: Es sei $f = f(x,y)$ eine antisymmetrische Funktion von 2 Variablen, es gelte also

$$f(x,y) \;=\; -\,f(y,x)$$

Zeigen Sie: Dann gilt

$$(f \otimes_a f)(x_1,x_2,x_3,x_4) \;=$$
$$= \;\frac{1}{3}\Big\{\, f(x_1,x_2)\, f(x_3,x_4) \;+\; f(x_2,x_3)\, f(x_1,x_4) \;+\; f(x_3,x_1)\, f(x_2,x_4)\,\Big\}\;.$$

Aufgabe 2: Beweisen Sie die folgenden Identitäten, die wir später bei den Definitionen und den elementaren Eigenschaften für die Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren benötigen werden:

a) Es sei $f \in L^2(\Gamma)$ und $F_{n-1} \in L^2_s(\Gamma^{n-1})$. Dann gilt

$$(f \otimes_s F_{n-1})(x_1,\cdots,x_n) \;=\; \tfrac{1}{n}\sum_{i=1}^n f(x_i)\, F_{n-1}(x_1,\cdots,\widehat{x_i},\cdots,x_n)$$

wobei das $\widehat{x_i}$ meint, dass diese Variable wegzulassen ist.

b) Es sei $g \in L^2(\Gamma)$ und $G_{n-1} \in L^2_a(\Gamma^{n-1})$. Dann gilt

$$(g \otimes_a G_{n-1})(x_1,\cdots,x_n) \;=\; \tfrac{1}{n}\sum_{i=1}^n (-1)^{i-1}\, g(x_i)\, G_{n-1}(x_1,\cdots,\widehat{x_i},\cdots,x_n)$$

wobei das $\widehat{x_i}$ wieder meint, dass diese Variable wegzulassen ist.

Aufgabe 3: Beweisen Sie das Lemma 4.2 aus der Vorlesung, das war die folgende Aussage:

a) Für $f,g \in L^2(\Gamma^n)$ gilt:

$$(f,P_s g) \;=\; (P_s f, g) \;=\; (P_s f, P_s g)$$
$$(f,P_a g) \;=\; (P_a f, g) \;=\; (P_a f, P_a g)$$

mit dem Standard-Skalarprodukt $(\,\cdot\,,\,\cdot\,)$ in $L^2(\Gamma^n) = \mathbb{C}^{|\Gamma|^n}$.

b) Für $f_1, ..., f_n \in L^2(\Gamma)$ und $g_1, ..., g_n \in L^2(\Gamma)$ gilt:

$$\begin{aligned}
\big(f_1 \otimes \cdots \otimes f_n \,,\, g_1 \otimes \cdots \otimes g_n \big) &= (f_1, g_1) \cdots (f_n, g_n) \\
\big(f_1 \otimes_s \cdots \otimes_s f_n \,,\, g_1 \otimes_s \cdots \otimes_s g_n \big) &= \tfrac{1}{n!} \, \mathrm{per}\big[\, (f_i, g_j)_{1 \le i,j \le n} \,\big] \\
\big(f_1 \otimes_a \cdots \otimes_a f_n \,,\, g_1 \otimes_a \cdots \otimes_a g_n \big) &= \tfrac{1}{n!} \, \det\big[\, (f_i, g_j)_{1 \le i,j \le n} \,\big]
\end{aligned}$$

mit der Permanente und der Determinante einer Matrix $A = (a_{ij})$,

$$\begin{aligned}
\mathrm{per} A &:= \sum_{\pi \in S_n} a_{1,\pi 1} \cdots a_{n,\pi n} \\
\det A &:= \sum_{\pi \in S_n} \mathrm{sign}\pi \; a_{1,\pi 1} \cdots a_{n,\pi n} \quad .
\end{aligned}$$