Hochschule RheinMain
Prof. Dr. D. Lehmann

SS 2023

3. Übungsblatt zur Vorlesung
Mathematische Methoden in der Quantenmechanik

Aufgabe 1: Für zwei Matrizen $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ und $B \in \mathbb{C}^{k\times \ell}$ ist das Kroenecker-Produkt $A\otimes B \in \mathbb{C}^{mk\times n\ell}$ definiert durch

$$A\otimes B \;:=\; \begin{pmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \cdots & a_{1n}B \\ a_{21}B & a_{22}B & \cdots & a_{2n}B \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}B & a_{m2}B & \cdots & a_{mn}B \end{pmatrix} \;\in\; \mathbb{C}^{mk\times n\ell} \tag{1}$$

a) Es seien A, B und C gegeben durch

$$A \;=\; (\, a_1\; a_2\,)\,, \qquad B \;=\; \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}\,, \qquad C \;=\; \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie $A\otimes B$ und $B\otimes C$ und verifizieren Sie dann für dieses Beispiel das Assoziativgesetz

$$A\otimes(B\otimes C) \;=\; (A\otimes B)\otimes C \tag{2}$$

b) Zeigen Sie mit dem A und C aus Teil (a): Im allgemeinen gilt

$$A\otimes C \;\neq\; C\otimes A$$

c) Es seien

$$x \;=\; \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\,,\quad y \;=\; \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\,, \qquad A \;=\; \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\,,\quad B \;=\; \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$$

Zeigen Sie: Es gilt

$$(Ax)\otimes(By) \;=\; (A\otimes B)(x\otimes y) \tag{3}$$

Allgemeiner gilt für Matrizen oder Vektoren A, B, C, D:

$$(A\otimes B)(C\otimes D) = AC\otimes BD \tag{4}$$

sofern die Matrixprodukte AC und BD Sinn machen.

d) Zeigen Sie: Sind $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ und $B \in \mathbb{C}^{m\times m}$ diagonalisierbare Matrizen mit den Eigenwerten $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ und $\mu_1, \cdots, \mu_m$, dann ist $A\otimes B$ eine diagonalisierbare Matrix mit den Eigenwerten $\{\, \lambda_i\mu_j \,\}_{1\le i\le n,\, 1\le j\le m}$.

e) Zeigen Sie: Für quadratische Matrizen A und B gilt $Tr(A\otimes B) = TrA\cdot TrB$.