Hochschule RheinMain SS 2023
Prof. Dr. D. Lehmann

1. Übungsblatt zur Vorlesung Mathematische Methoden in der Quantenmechanik

Aufgabe 1 (Erinnerung ideales Gasgesetz): Die Zustandsgleichung für ein ideales Gas lautet

$$P \cdot V \;=\; n \cdot R \cdot T$$

mit P der Druck, V das Volumen, n die Anzahl der Gasatome oder Moleküle, gemessen in Mol, T die absolute Temperatur und R die allgemeine Gaskonstante, gegeben durch

$$R \;=\; 8.314\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{mol\,K}}$$

a) Erinnern Sie sich an die Definition des Mols. 1 Mol eines Stoffes enthält wieviele Teilchen? 1 Mol Wasser hat welche Masse?

b) Erinnern Sie sich an die Einheiten Bar (bar), Millibar (mbar), Pascal (Pa) und Hektopascal (hPa). Wie gross ist der Standard-Atmosphärendruck in Millibar und in Hektopascal?

c) Betrachten Sie 1 Mol eines idealen Gases bei Standard-Atmosphärendruck. Wie gross ist das Volumen bei $0°\mathrm{C} = 273.15\,\mathrm{K}$? Wie gross ist das Volumen bei Raumtemperatur $T \approx 300\,\mathrm{K}$? Geben Sie das Resultat in Litern an, was ist die genaue Definition von Liter?

Aufgabe 2 (Temperatur als kinetische Energie): Wir betrachten N punktförmige klassische (nicht quantenmechanisch) Teilchen mit Masse m in einem Würfel $[0,L]^3$, N etwa von der Grössenordnung 10^{23}. Punktförmig meint, dass wir Teilchen-Teilchen Kollisionen vernachlässigen wollen und nur die Wechselwirkung der Teilchen mit den Wänden des Würfels berücksichtigen wollen. Diese besteht darin, dass, wenn etwa das i-te Teilchen mit Geschwindigkeitskomponente $v_{i,x}$ auf die Wand bei $x = L$ zufliegt, es dann daran reflektiert wird und sich dann mit Geschwindigkeitskomponente $-v_{i,x}$ von der Wand wegbewegt. Die Impulsänderung senkrecht zur Wand beträgt dann also $\Delta p_{i,x} = 2mv_{i,x}$.

a) Überlegen Sie sich, dass auf diese Weise eine Gesamtkraft von

$$F \;=\; \sum_{i=1}^{N} \frac{m\,v_{i,x}^2}{L}$$

auf die Wand bei $x = L$ ausgeübt wird.

b) Folgern Sie aus (a): Der Druck P auf die Wand bei $x = L$ beträgt

$$P \;=\; \frac{m}{V} \sum_{i=1}^{N} v_{i,x}^2$$

mit dem Würfel-Volumen $V = L^3$.

c) Folgern Sie aus (b): Definieren wir ein mittleres Geschwindigkeitsbetragsquadrat $\langle v^2 \rangle$ durch

$$\langle v^2 \rangle \;:=\; \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} (v_{i,x}^2 + v_{i,y}^2 + v_{i,z}^2)$$

dann gilt

$$P \cdot V \;\approx\; N \cdot \frac{m \langle v^2 \rangle}{3} \;=\; \frac{2}{3} \cdot N \cdot \langle E_{\mathrm{kin}} \rangle$$

mit der mittleren kinetischen Energie pro Teilchen

$$\langle E_{\mathrm{kin}} \rangle \;=\; \frac{m \langle v^2 \rangle}{2}$$

d) Benutzen Sie jetzt das ideale Gasgesetz

$$P \cdot V \;=\; n \cdot R \cdot T$$

aus Aufgabe 1, um den folgenden Zusammenhang zwischen Temperatur T und mittlerer kinetischer Teilchenenergie $\langle E_{\mathrm{kin}} \rangle$ herzuleiten:

$$\langle E_{\mathrm{kin}} \rangle \;=\; \frac{3}{2}\, k_{\mathrm{B}}\, T$$

Dabei ist

$$k_{\mathrm{B}} \;=\; \frac{R}{N_{\mathrm{A}}}$$

die Boltzmann-Konstante und $N_{\mathrm{A}} \approx 6.022 \times 10^{23}\,\mathrm{mol}^{-1}$ die Avogadro-Konstante. Geben Sie den numerischen Wert von k_{B} an, in Joule durch Kelvin J/K und in Elektronenvolt pro Kelvin eV/K.