Hochschule RheinMain
Prof. Dr. D. Lehmann SS 2023

Lösungen 9. Übungsblatt
Mathematische Methoden in der Quantenmechanik

Aufgabe 1: Wir haben

$$\begin{aligned}(\psi^a, c_x^+ c_y \psi^a) &= (c_x\psi^a, c_y\psi^a) \\ (\psi^s, a_x^+ a_y \psi^s) &= (a_x\psi^s, a_y\psi^s)\end{aligned}$$

und mit Teil (a) vom Theorem 8.1

$$\begin{aligned}(c_y\psi^a)(x_1,\cdots,x_{n-1}) &= \sqrt{n}\ \textstyle\sum_{z\in\Gamma} \bar{e}_y(z)\,\psi^a(z,x_1,\cdots,x_{n-1}) \\ &= \sqrt{n}\ \textstyle\sum_{z\in\Gamma} \delta_{y,z}\,\psi^a(z,x_1,\cdots,x_{n-1}) \\ &= \sqrt{n}\ \psi^a(y,x_1,\cdots,x_{n-1})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(a_y\psi^s)(x_1,\cdots,x_{n-1}) &= \sqrt{n}\ \textstyle\sum_{z\in\Gamma} \bar{e}_y(z)\,\psi^s(z,x_1,\cdots,x_{n-1}) \\ &= \sqrt{n}\ \textstyle\sum_{z\in\Gamma} \delta_{y,z}\,\psi^s(z,x_1,\cdots,x_{n-1}) \\ &= \sqrt{n}\ \psi^s(y,x_1,\cdots,x_{n-1})\end{aligned}$$

Also,

$$\begin{aligned}(\psi^a, c_x^+ c_y\psi^a) &= (c_x\psi^a, c_y\psi^a) = \sum_{x_2\cdots x_n} \overline{(c_x\psi^a)(x_2,\cdots,x_n)}\,(c_y\psi^a)(x_2,\cdots,x_n) \\ &= n \sum_{x_2\cdots x_n} \overline{\psi^a(x,x_2,\cdots,x_n)}\ \psi^a(y,x_1,\cdots,x_{n-1}) \\ &= n\ \rho_\psi^a(x,y)\end{aligned}$$

und das analoge Resultat für den symmetrischen Fall.

Aufgabe 2: Es sei

$$M_t \ := \ e^{tA}\ B\ e^{-tA}$$

Dann gilt

$$\begin{aligned}\tfrac{d}{dt}M_t &= \tfrac{d}{dt}\big\{e^{tA}\ B\ e^{-tA}\big\} \\ &= A\,e^{tA}\ B\ e^{-tA}\ -\ e^{tA}\ B\ e^{-tA}\ A \\ &= A\,M_t\ -\ M_t\,A \\ &= [A, M_t] \\ &= L_A\,M_t\end{aligned}$$

Die Differentialgleichung

$$\tfrac{d}{dt} M_t \;\; = \;\; L_A \, M_t$$

wird aber gerade gelöst von

$$e^{tL_A} M_0 \;\; = \;\; e^{tL_A} \, B \;\; .$$

Aufgabe 3: Es sei

$$M_t \;\; := \;\; e^{tA} \, e^{tB} \, e^{-\frac{t^2}{2}[A,B]}$$

Wir zeigen, dass M_t die Differentialgleichung

$$\tfrac{d}{dt} M_t \;\; = \;\; (A+B) M_t$$

erfüllt. Da die linke und die rechte Seite der zu beweisenden Formel für $t = 0$ offensichtlich identisch sind, folgt dann die Behauptung. Wir haben

$$\begin{aligned} \tfrac{d}{dt} M_t \;\; = \;\; & A \, e^{tA} \, e^{tB} \, e^{-\frac{t^2}{2}[A,B]} \\ & + e^{tA} \, B \, e^{tB} \, e^{-\frac{t^2}{2}[A,B]} \\ & + e^{tA} \, e^{tB} \, (-t[A,B]) \, e^{-\frac{t^2}{2}[A,B]} \end{aligned} \tag{1}$$

Da $[A, B]$ mit A und mit B kommutiert, kommutiert $[A, B]$ auch mit e^{tA} und mit e^{tB}. Den letzten Term in (1) können wir also auch so schreiben:

$$e^{tA} \, e^{tB} \, (-t[A,B]) \, e^{-\frac{t^2}{2}[A,B]} \;\; = \;\; -t[A,B] \, e^{tA} \, e^{tB} \, e^{-\frac{t^2}{2}[A,B]}$$

Den zweiten Term in (1) schreiben wir so:

$$\begin{aligned} e^{tA} \, B \, e^{tB} \, e^{-\frac{t^2}{2}[A,B]} \;\; & = \;\; e^{tA} \, B \, e^{-tA} \, e^{tA} e^{tB} \, e^{-\frac{t^2}{2}[A,B]} \\ & \overset{\text{Aufg.1}}{=} \;\; e^{tL_A}(B) \, e^{tA} e^{tB} \, e^{-\frac{t^2}{2}[A,B]} \end{aligned} \tag{2}$$

Nun haben wir

$$e^{tL_A}(B) \;\; = \;\; \Big\{ Id \; + \; L_A \; + \; \tfrac{1}{2} L_A^2 \; + \; \tfrac{1}{3!} L_A^3 \; + \; \cdots \Big\}(B)$$

und es gilt

$$\begin{aligned} L_A(B) \;\; & = \;\; [A,B] \\ L_A^2(B) \;\; & = \;\; L_A\big([A,B]\big) \;\; = \;\; \big[\, A \, , \, [A,B] \, \big] \;\; \overset{\substack{\text{nach} \\ \text{Voraussetzung}}}{=} \;\; 0 \end{aligned}$$

und damit

$$L_A^n(B) \;\; = \;\; 0 \quad \forall n \geq 2 \;\; .$$

Also,

$$e^{tL_A}(B) \;\; = \;\; B \; + \; t[A,B]$$

und den zweiten Term in (1) können wir auch so schreiben:

$$\begin{aligned} e^{tA}\,B\,e^{tB}\,e^{-\frac{t^2}{2}[A,B]} &= e^{tL_A}(B)\,e^{tA}e^{tB}\,e^{-\frac{t^2}{2}[A,B]} \\ &= \big\{B \,+\, t[A,B]\big\}\,M_t \end{aligned}$$

Wenn wir das in (1) einsetzen, bekommen wir

$$\begin{aligned} \tfrac{d}{dt}M_t &= A\,M_t \,+\, \big\{B \,+\, t[A,B]\big\}\,M_t \,-\, t[A,B]\,M_t \\ &= (A+B)M_t \end{aligned}$$

und diese DGL wird gerade gelöst von

$$M_t \;=\; e^{t(A+B)}M_0 \;=\; e^{t(A+B)} \quad .$$