Hochschule RheinMain SS 2023
Prof. Dr. D. Lehmann

Lösungen zum 5. Übungsblatt
Mathematische Methoden in der Quantenmechanik

Aufgabe 1: Wir beweisen die antisymmetrische Version, die Formel für den symmetrischen Fall folgt dann analog. Wir wenden wieder das Lemma 4.1 an: Mit $x_1 := y$ und der disjunkten Zerlegung

$$\begin{aligned}\{1,\cdots,n\} &= \{\,i\,\} \cup \{1,\cdots,i-1,i+1,\cdots,n\} \\ &=: \{\,i_1\,\} \cup \{j_1,\cdots,j_{n-1}\}\end{aligned}$$

bekommen wir

$$\begin{aligned} n!\,(f_1\otimes_a\cdots\otimes_a f_n)(y,x_2,\cdots,x_n) &= \sum_{\pi\in S_n}\operatorname{sign}\pi\; f_{\pi 1}(y)\,f_{\pi 2}(x_2)\cdots f_{\pi n}(x_n) \\ &= \sum_{i_1=1}^n \sum_{\substack{\sigma\in S_1\\ \tau\in S_{n-1}}} \operatorname{sign} i\,\operatorname{sign}\sigma\,\operatorname{sign}\tau\; f_{i_{\sigma 1}}(y)\; f_{j_{\tau 1}}(x_2)\cdots f_{j_{\tau(n-1)}}(x_n) \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{\tau\in S_{n-1}} (-1)^{i-1}\operatorname{sign}\tau\; f_i(y)\; f_{j_{\tau 1}}(x_2)\cdots f_{j_{\tau(n-1)}}(x_n) \\ &= (n-1)!\,\sum_{i=1}^n (-1)^{i-1}\; f_i(y)\; \tfrac{1}{(n-1)!}\sum_{\tau\in S_{n-1}}\operatorname{sign}\tau\; f_{j_{\tau 1}}(x_2)\cdots f_{j_{\tau(n-1)}}(x_n) \\ &= (n-1)!\,\sum_{i=1}^n (-1)^{i-1}\; f_i(y)\; P_a(f_1\otimes\cdots\widehat{f_i}\cdots\otimes f_n)(x_2,\cdots,x_n)\end{aligned}$$

und damit

$$(f_1\otimes_a\cdots\otimes_a f_n)(y,x_2,\cdots,x_n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (-1)^{i-1}\,f_i(y)\;\,(f_1\otimes_a\cdots\widehat{f_i}\cdots\otimes_a f_n)(x_2,\cdots,x_n)$$

Die Formel für die symmetrisierten Produkte folgt analog. ■

Aufgabe 2: Wir zeigen zunächst die symmetrische Version: Mit Aufgabe 1 bekommen wir

$$\begin{aligned}\rho^s_{\{n_k\}}(x,y) &= \frac{n!}{\Pi_k\, n_k!}\sum_{x_2,\cdots,x_n\in\Gamma_x}(\bar e_{k_1}\otimes_s\cdots\otimes_s\bar e_{k_n})(x,x_2,\cdots,x_n)\,\times \\ &\qquad\qquad (e_{k_1}\otimes_s\cdots\otimes_s e_{k_n})(y,x_2,\cdots,x_n) \\ &= \frac{n!}{\Pi_k\, n_k!}\,\frac{1}{n^2}\sum_{i,j=1}^n \bar e_{k_i}(x)\,e_{k_j}(y)\;\big(\,e_{k_1}\otimes_s\cdots\widehat{e_{k_i}}\cdots\otimes_s e_{k_n}\,,\;e_{k_1}\otimes_s\cdots\widehat{e_{k_j}}\cdots\otimes_s e_{k_n}\,\big)\end{aligned}$$

Nun ist

$$\begin{aligned}
&\sum_{i,j=1}^{n} \bar{e}_{k_i}(x)\, e_{k_j}(y)\ \big(e_{k_1} \otimes_s \cdots \widehat{e_{k_i}} \cdots \otimes_s e_{k_n}\, ,\, e_{k_1} \otimes_s \cdots \widehat{e_{k_j}} \cdots \otimes_s e_{k_n} \big) \\
&\qquad = \sum_{i=1}^{n} n_{k_i}\, \bar{e}_{k_i}(x)\, e_{k_i}(y)\ \big(e_{k_1} \otimes_s \cdots \widehat{e_{k_i}} \cdots \otimes_s e_{k_n}\, ,\, e_{k_1} \otimes_s \cdots \widehat{e_{k_i}} \cdots \otimes_s e_{k_n} \big) \\
&\qquad = \sum_{i=1}^{n} n_{k_i}\, \bar{e}_{k_i}(x)\, e_{k_i}(y)\ \frac{(n_{k_i}-1)!\ \Pi_{k\neq k_i} n_k!}{(n-1)!} \\
&\qquad = \sum_{i=1}^{n} \bar{e}_{k_i}(x)\, e_{k_i}(y)\ \frac{\Pi_k\, n_k!}{(n-1)!}
\end{aligned}$$

Also,

$$\begin{aligned}
\rho^s_{\{n_k\}}(x,y) &= \frac{n!}{\Pi_k\, n_k!}\,\frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n} \bar{e}_{k_i}(x)\, e_{k_i}(y)\ \frac{\Pi_k\, n_k!}{(n-1)!} \\
&= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \bar{e}_{k_i}(x)\, e_{k_i}(y) \\
&= \frac{1}{n} \sum_{k\in\Gamma_k} n_k\, \bar{e}_k(x)\, e_k(y)
\end{aligned}$$

Im antisymmetrischen Fall bekommen wir, ebenfalls mit Aufgabe 1

$$\begin{aligned}
\rho^a_{\{n_k\}}(x,y) &= n! \sum_{x_2,\cdots,x_n\in\Gamma_x} (\bar{e}_{k_1} \otimes_a \cdots \otimes_a \bar{e}_{k_n})(x,x_2,\cdots,x_n) \times \\
&\qquad\qquad (e_{k_1} \otimes_a \cdots \otimes_a e_{k_n})(y,x_2,\cdots,x_n) \\
&= n!\ \frac{1}{n^2} \sum_{i,j=1}^{n} (-1)^{i+j}\, \bar{e}_{k_i}(x)\, e_{k_j}(y)\ \big(e_{k_1} \otimes_a \cdots \widehat{e_{k_i}} \cdots \otimes_a e_{k_n}\, ,\, e_{k_1} \otimes_a \cdots \widehat{e_{k_j}} \cdots \otimes_a e_{k_n} \big) \\
&= n!\ \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+i}\, \bar{e}_{k_i}(x)\, e_{k_i}(y)\ \big(e_{k_1} \otimes_a \cdots \widehat{e_{k_i}} \cdots \otimes_a e_{k_n}\, ,\, e_{k_1} \otimes_a \cdots \widehat{e_{k_i}} \cdots \otimes_a e_{k_n} \big) \\
&= n!\ \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n} (-1)^{2i}\, \bar{e}_{k_i}(x)\, e_{k_i}(y)\ \frac{1}{(n-1)!} \\
&= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \bar{e}_{k_i}(x)\, e_{k_i}(y)
\end{aligned}$$

Also, sowohl für den symmetrischen wie auch für den antisymmetrischen Fall

$$\rho^s_{\{n_k\}}(x,y) \;=\; \rho^a_{\{n_k\}}(x,y) \;=\; \rho_{\{n_k\}}(x,y)$$

mit der Dichte-Funktion

$$\rho_{\{n_k\}}(x,y) \;=\; \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \bar{e}_{k_i}(x)\, e_{k_i}(y) \;=\; \sum_{k\in\Gamma_k} \frac{n_k}{n}\, \bar{e}_k(x)\, e_k(y)$$

wobei das letzte Gleichheitszeichen gerade von der Definition der Besetzungszahlen $\{n_k\}$ herkommt, unter den Impulsen

$$\{\, k_1\,,\, k_2\,,\, \cdots\,,\, k_n\,\}$$

kommt genau n_k mal der Impuls k vor. Die normierten ebenen Wellen $e_k(x)$ waren gegeben durch

$$e_k(x) \;=\; \tfrac{1}{\sqrt{|\Gamma|}}\; e^{\,i\,k\cdot x}$$

mit

$$\frac{1}{|\Gamma|} \;=\; \frac{(\Delta x \Delta k)^d}{(2\pi)^d}$$

also erhalten wir schliesslich

$$\rho_{\{n_k\}}(x,y) \;=\; (\Delta x)^d \sum_{k\in\Gamma_k} \tfrac{(\Delta k)^d}{(2\pi)^d}\; \frac{n_k}{n}\; e^{\,-\,i\,k(x-y)}$$

Insbesondere,

$$\begin{aligned}
\sum_{x\in\Gamma_x} \rho_{\{n_k\}}(x,x) \;&=\; \sum_{x\in\Gamma_x} (\Delta x)^d \sum_{k\in\Gamma_k} \tfrac{(\Delta k)^d}{(2\pi)^d}\; \frac{n_k}{n} \\
&=\; |\Gamma|\; (\Delta x)^d \sum_{k\in\Gamma_k} \tfrac{(\Delta k)^d}{(2\pi)^d}\; \frac{n_k}{n} \\
&=\; \sum_{k\in\Gamma_k} \frac{n_k}{n} \;=\; \frac{n}{n} \;=\; 1\;\;.
\end{aligned}$$