Hochschule RheinMain SS 2023
Prof. Dr. D. Lehmann

Lösungen zum 4. Übungsblatt
Mathematische Methoden in der Quantenmechanik

Aufgabe 1: Nach Definition ist für ein $f = f(x_1, x_2)$

$$\begin{aligned}(f \otimes_a f)(x_1,x_2,x_3,x_4) &= [P_a(f\otimes f)](x_1,x_2,x_3,x_4) \\ &= \tfrac{1}{4!}\sum_{\pi\in S_4} \mathrm{sign}\pi\ (f\otimes f)(x_{\pi 1},x_{\pi 2},x_{\pi 3},x_{\pi 4}) \\ &= \tfrac{1}{4!}\sum_{\pi\in S_4} \mathrm{sign}\pi\ f(x_{\pi 1},x_{\pi 2})\ f(x_{\pi 3},x_{\pi 4})\end{aligned}$$

Da das x ‘keine Information trägt’, benutzen wir im folgendem der Übersichtlichkeit halber die folgende Notation:

$$(f \otimes_a f)(x_1,x_2,x_3,x_4) = \tfrac{1}{4!}\sum_{\pi\in S_4} \mathrm{sign}\pi\ f(\pi 1,\pi 2)\ f(\pi 3,\pi 4)$$

oder vielleicht dann einfach nur

$$(f \otimes_a f)(1,2,3,4) = \tfrac{1}{4!}\sum_{\pi\in S_4} \mathrm{sign}\pi\ f(\pi 1,\pi 2)\ f(\pi 3,\pi 4)$$

ganz am Ende tun wir dann wieder die x’s mit reinschreiben.

Es gibt $4! = 24$ Permutationen der Zahlen $\{1,2,3,4\}$, schreiben wir uns zunächst die $3! = 6$ Permutationen $\pi \in S_4$ hin, für die die 4 fest bleibt, $\pi 4 = 4$. Das sind die folgenden, mit dem entsprechenden Signum $\mathrm{sign}\pi$:

$\pi 1$	$\pi 2$	$\pi 3$	$\pi 4$	$\mathrm{sign}\pi$
1	2	3	4	$+1$
2	3	1	4	$+1$
3	1	2	4	$+1$
3	2	1	4	-1
2	1	3	4	-1
1	3	2	4	-1

Diese Permutationen liefern die folgenden Beiträge:

$$\begin{aligned}\mathrm{Summe}_1 = \ &+1\ f(1,2)\ f(3,4) \\ &+1\ f(2,3)\ f(1,4) \\ &+1\ f(3,1)\ f(2,4) \\ &-1\ f(3,2)\ f(1,4) \\ &-1\ f(2,1)\ f(3,4) \\ &-1\ f(1,3)\ f(2,4)\end{aligned}$$

Wir benutzen

$$f(x,y) \quad = \quad -\, f(y,x)$$

und tun in den letzten 3 Termen jeweils in dem ersten f die Argumente vertauschen,

$$\begin{aligned}
\text{Summe}_1 \quad = \quad & +1\; f(1,2)\; f(3,4) \\
& +1\; f(2,3)\; f(1,4) \\
& +1\; f(3,1)\; f(2,4) \\
& +1\; f(2,3)\; f(1,4) \\
& +1\; f(1,2)\; f(3,4) \\
& +1\; f(3,1)\; f(2,4) \\
\\
= \quad & +2\; f(1,2)\; f(3,4) \\
& +2\; f(2,3)\; f(1,4) \\
& +2\; f(3,1)\; f(2,4)
\end{aligned}$$

Jetzt schreiben wir die $3! = 6$ Permutationen $\pi \in S_4$ hin, für die $\pi 3 = 4$ ist, das sind die folgenden, wieder mit dem entsprechenden Signum $\text{sign}\pi$:

$\pi 1$	$\pi 2$	$\pi 3$	$\pi 4$	$\text{sign}\pi$
1	2	4	3	-1
2	3	4	1	-1
3	1	4	2	-1
3	2	4	1	$+1$
2	1	4	3	$+1$
1	3	4	2	$+1$

Diese Permutationen liefern die folgenden Beiträge:

$$\begin{aligned}
\text{Summe}_2 \quad = \quad & -1\; f(1,2)\; f(4,3) \\
& -1\; f(2,3)\; f(4,1) \\
& -1\; f(3,1)\; f(4,2) \\
& +1\; f(3,2)\; f(4,1) \\
& +1\; f(2,1)\; f(4,3) \\
& +1\; f(1,3)\; f(4,2) \\
\\
= \quad & +1\; f(1,2)\; f(3,4) \\
& +1\; f(2,3)\; f(1,4) \\
& +1\; f(3,1)\; f(2,4) \\
& -1\; f(3,2)\; f(1,4) \\
& -1\; f(2,1)\; f(3,4) \\
& -1\; f(1,3)\; f(2,4) \quad = \quad \text{Summe}_1
\end{aligned}$$

Schreiben wir uns jetzt die $3! = 6$ Permutationen $\pi \in S_4$ hin, für die $\pi 2 = 4$ ist,

$\pi 1$	$\pi 2$	$\pi 3$	$\pi 4$	$\mathrm{sign}\pi$
1	4	2	3	$+1$
2	4	3	1	$+1$
3	4	1	2	$+1$
3	4	2	1	-1
2	4	1	3	-1
1	4	3	2	-1

Diese Permutationen liefern die folgenden Beiträge:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Summe}_3 \quad = \quad & +1\, f(1,4)\, f(2,3) \\
& +1\, f(2,4)\, f(3,1) \\
& +1\, f(3,4)\, f(1,2) \\
& -1\, f(3,4)\, f(2,1) \\
& -1\, f(2,4)\, f(1,3) \\
& -1\, f(1,4)\, f(3,2) \\
\\
= \quad & +1\, f(1,2)\, f(3,4) \\
& +1\, f(2,3)\, f(1,4) \\
& +1\, f(3,1)\, f(2,4) \\
& -1\, f(3,2)\, f(1,4) \\
& -1\, f(2,1)\, f(3,4) \\
& -1\, f(1,3)\, f(2,4) \quad = \quad \mathrm{Summe}_1
\end{aligned}$$

Und schliesslich alle Permutationen mit $\pi 1 = 4$,

$\pi 1$	$\pi 2$	$\pi 3$	$\pi 4$	$\mathrm{sign}\pi$
4	1	2	3	-1
4	2	3	1	-1
4	3	1	2	-1
4	3	2	1	$+1$
4	2	1	3	$+1$
4	1	3	2	$+1$

Diese Permutationen liefern die Beiträge:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Summe}_4 \quad = \quad & -1\, f(4,1)\, f(2,3) \\
& -1\, f(4,2)\, f(3,1) \\
& -1\, f(4,3)\, f(1,2) \\
& +1\, f(4,3)\, f(2,1) \\
& +1\, f(4,2)\, f(1,3) \\
& +1\, f(4,1)\, f(3,2)
\end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned}
\text{Summe}_4 \quad = \quad & +1\ f(1,4)\ f(2,3) \\
& +1\ f(2,4)\ f(3,1) \\
& +1\ f(3,4)\ f(1,2) \\
& -1\ f(3,4)\ f(2,1) \\
& -1\ f(2,4)\ f(1,3) \\
& -1\ f(1,4)\ f(3,2) \quad = \quad \text{Summe}_3 \quad = \quad \text{Summe}_1
\end{aligned}$$

Insgesamt bekommen wir also

$$\begin{aligned}
(f \otimes_a f)(1,2,3,4) \quad &= \quad \tfrac{1}{4!} \sum_{\pi \in S_4} \operatorname{sign}\pi\ f(\pi 1, \pi 2)\ f(\pi 3, \pi 4) \\
&= \quad \tfrac{1}{4!} \left\{ \text{Summe}_1 \ + \ \text{Summe}_2 \ + \ \text{Summe}_3 \ + \ \text{Summe}_4 \right\} \\
&= \quad \tfrac{4}{4!}\, \text{Summe}_1 \\
&= \quad \tfrac{8}{4!} \left\{ \ f(1,2)\ f(3,4) \ + \ f(2,3)\ f(1,4) \ + \ f(3,1)\ f(2,4) \ \right\}
\end{aligned}$$

oder, wenn wir die x's wieder mit reinschreiben,

$$(f \otimes_a f)(x_1, x_2, x_3, x_4) \quad =$$

$$\tfrac{1}{3} \left\{ \ f(x_1, x_2)\ f(x_3, x_4) \ + \ f(x_2, x_3)\ f(x_1, x_4) \ + \ f(x_3, x_1)\ f(x_2, x_4) \ \right\}$$

Damit ist die Aussage bewiesen.

Aufgabe 2: a) Wir haben

$$\begin{aligned}
(f \otimes_s F_{n-1})(x_1, \cdots, x_n) \quad &= \quad [P_s(f \otimes F_{n-1})](x_1, \cdots, x_n) \\
&= \quad \tfrac{1}{n!} \sum_{\pi \in S_n} f(x_{\pi 1})\ F_{n-1}(x_{\pi 2}, \cdots, x_{\pi n})
\end{aligned}$$

Wir wenden das Lemma 4.1 aus der Vorlesung an in der Form (dabei war $I_n = \{1, \cdots, n\}$ und die j_r waren aus $I_n \setminus \{i\}$)

$$\sum_{\pi \in S_{1+(n-1)}} F(x_{\pi 1}, \cdots, x_{\pi n}) \quad = \quad \sum_{i \in I_n} \sum_{\tau \in S_{n-1}} F(x_i, x_{j_{\tau 1}}, \cdots, x_{j_{\tau(n-1)}})$$

und bekommen

$$\begin{aligned}
(f \otimes_s F_{n-1})(x_1, \cdots, x_n) \quad &= \quad \tfrac{1}{n!} \sum_{\pi \in S_n} f(x_{\pi 1})\ F_{n-1}(x_{\pi 2}, \cdots, x_{\pi n}) \\
&= \quad \tfrac{1}{n!} \sum_{i=1}^{n} \sum_{\tau \in S_{n-1}} f(x_i)\ F_{n-1}(x_{j_{\tau 1}}, \cdots, x_{j_{\tau(n-1)}})
\end{aligned}$$

Das F_{n-1} ist symmetrisch, also, mit $\{j_1, \cdots, j_{n-1}\} = \{1, \cdots, i-1, i+1, \cdots, n\}$,

$$\begin{aligned} F_{n-1}(x_{j_{\tau 1}}, \cdots, x_{j_{\tau(n-1)}}) &= F_{n-1}(x_{j_1}, \cdots, x_{j_{n-1}}) \\ &= F_{n-1}(x_1, \cdots, \widehat{x_i}, \cdots, x_n) \end{aligned}$$

und wir erhalten

$$\begin{aligned} (f \otimes_s F_{n-1})(x_1, \cdots, x_n) &= \tfrac{1}{n!} \sum_{i=1}^{n} \sum_{\tau \in S_{n-1}} f(x_i)\; F_{n-1}(x_{j_{\tau 1}}, \cdots, x_{j_{\tau(n-1)}}) \\ &= \tfrac{1}{n!} \sum_{i=1}^{n} \sum_{\tau \in S_{n-1}} f(x_i)\; F_{n-1}(x_1, \cdots, \widehat{x_i}, \cdots, x_n) \\ &= \tfrac{1}{n!} \sum_{i=1}^{n} (n-1)!\; f(x_i)\; F_{n-1}(x_1, \cdots, \widehat{x_i}, \cdots, x_n) \\ &= \tfrac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\; F_{n-1}(x_1, \cdots, \widehat{x_i}, \cdots, x_n) \end{aligned}$$

Zum Beweis der antisymmetrischen Version aus Teil (b) benutzen wir noch die Formel (37) aus dem Lemma 4.1, das war

$$\operatorname{sign} \pi \;=\; \operatorname{sign} i \operatorname{sign} \sigma \operatorname{sign} \tau \;\overset{\text{hier}}{=}\; \operatorname{sign} i \operatorname{sign} \tau$$

Dabei war $\operatorname{sign} i$ das Signum der Permutation, die durch die disjunkte Zerlegung (36), das ist dann hier

$$\begin{aligned} I_{1+(n-1)} \;:=\; \{1, \cdots, n\} &= \{i\} \cup \{j_1, \cdots, j_{n-1}\} \\ &= \{i\} \cup \{1, \cdots, i-1, i+1, \cdots, n\} \end{aligned}$$

festgelegt ist. Man muss also das i von der i-ten Stelle auf die erste Stelle permutieren, und das geht mit $i-1$ Transpositionen, also ist

$$\operatorname{sign} i \;=\; (-1)^{i-1}$$

Damit bekommen wir dann

$$\begin{aligned} (g \otimes_a G_{n-1})(x_1, \cdots, x_n) &= [P_a(g \otimes G_{n-1})](x_1, \cdots, x_n) \\ &= \tfrac{1}{n!} \sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sign} \pi\; g(x_{\pi 1})\; G_{n-1}(x_{\pi 2}, \cdots, x_{\pi n}) \\ &= \tfrac{1}{n!} \sum_{i=1}^{n} \sum_{\tau \in S_{n-1}} \operatorname{sign} i \operatorname{sign} \tau\; g(x_i)\; G_{n-1}(x_{j_{\tau 1}}, \cdots, x_{j_{\tau(n-1)}}) \\ &= \tfrac{1}{n!} \sum_{i=1}^{n} \sum_{\tau \in S_{n-1}} \operatorname{sign} i\; g(x_i)\; G_{n-1}(x_{j_1}, \cdots, x_{j_{n-1}}) \\ &= \tfrac{1}{n!} \sum_{i=1}^{n} (n-1)!\, (-1)^{i-1}\; g(x_i)\; G_{n-1}(x_1, \cdots, \widehat{x_i}, \cdots, x_n) \\ &= \tfrac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1}\, g(x_i)\, G_{n-1}(x_1, \cdots, \widehat{x_i}, \cdots, x_n) \end{aligned}$$

Aufgabe 3: a) Wir haben

$$\begin{aligned}
(f, P_a g) &= \sum_{x_1,\ldots,x_n} \bar{f}(x_1, \cdots, x_n)\, (P_a g)(x_1, \cdots, x_n) \\
&= \tfrac{1}{n!} \sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sign}\pi \sum_{x_1,\ldots,x_n} \bar{f}(x_1, \cdots, x_n)\, g(x_{\pi 1}, \cdots, x_{\pi n}) \\
&= \tfrac{1}{n!} \sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sign}\pi \sum_{y_1,\ldots,y_n} \bar{f}(y_{\pi^{-1}1}, \cdots, y_{\pi^{-1}n})\, g(y_1, \cdots, y_n) \\
&= \sum_{y_1,\ldots,y_n} \tfrac{1}{n!} \sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sign}(\pi^{-1})\, \bar{f}(y_{\pi^{-1}1}, \cdots, y_{\pi^{-1}n})\, g(y_1, \cdots, y_n) \\
&= \sum_{y_1,\ldots,y_n} \overline{P_a f}(y_1, \cdots, y_n)\, g(y_1, \cdots, y_n) \;=\; (P_a f, g)
\end{aligned}$$

mit einer analogen Rechnung für $(f, P_s g)$. Weiterhin ist $P_a^2 = P_a$, $P_s^2 = P_s$ und wir bekommen $(f, P_a g) = (f, P_a^2 g) = (P_a f, P_a g)\,.$

b) Wegen

$$(f_1 \otimes \cdots \otimes f_n)(x_1, \cdots, x_n) = f_1(x_1) \cdots f_n(x_n)$$

ist die erste Identität offensichtlich. Für das Skalarprodukt mit dem antisymmetrische Tensorprodukt bekommen wir

$$\begin{aligned}
\big(f_1 \otimes_a \cdots \otimes_a f_n \,,\, g_1 \otimes_a \cdots \otimes_a g_n \big) &= \big(P_a[f_1 \otimes \cdots \otimes f_n] \,,\, P_a[g_1 \otimes \cdots \otimes g_n] \big) \\
&= \big(f_1 \otimes \cdots \otimes f_n \,,\, P_a^2[g_1 \otimes \cdots \otimes g_n] \big) \\
&= \big(f_1 \otimes \cdots \otimes f_n \,,\, P_a[g_1 \otimes \cdots \otimes g_n] \big) \\
&= \tfrac{1}{n!} \sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sign}\pi \,\big(f_1 \otimes \cdots \otimes f_n \,,\, g_{\pi 1} \otimes \cdots \otimes g_{\pi n} \big) \\
&= \tfrac{1}{n!} \sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sign}\pi \,(f_1, g_{\pi 1}) \cdots (f_n, g_{\pi n}) \\
&= \tfrac{1}{n!} \det\big[\, (f_i, g_j)_{1 \le i,j \le n} \,\big]
\end{aligned}$$

Wegen

$$\operatorname{per}\big[\, (f_i, g_j)_{1 \le i,j \le n} \,\big] := \sum_{\pi \in S_n} (f_1, g_{\pi 1}) \cdots (f_n, g_{\pi n})$$

folgt die Identität für das symmetrische Tensorprodukt analog. ∎