Hochschule RheinMain
Prof. Dr. D. Lehmann SS 2023

Lösungen 3. Übungsblatt
Mathematische Methoden in der Quantenmechanik

Aufgabe 1: a) Nach Definition ist

$$A \otimes B \;=\; (\, a_1 B \; a_2 B \,) \;=\; \begin{pmatrix} a_1 b_{11} & a_1 b_{12} & a_2 b_{11} & a_2 b_{12} \\ a_1 b_{21} & a_1 b_{22} & a_2 b_{21} & a_2 b_{22} \end{pmatrix}$$

und

$$B \otimes C \;=\; \begin{pmatrix} b_{11} C & b_{12} C \\ b_{21} C & b_{22} C \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} b_{11} c_1 & b_{12} c_1 \\ b_{11} c_2 & b_{12} c_2 \\ b_{21} c_1 & b_{22} c_1 \\ b_{21} c_2 & b_{22} c_2 \end{pmatrix}$$

Also,

$$\begin{aligned} A \otimes (B \otimes C) \;&=\; \big(\, a_1 (B \otimes C) \quad a_2 (B \otimes C) \,\big) \\ &=\; \begin{pmatrix} a_1 b_{11} c_1 & a_1 b_{12} c_1 & a_2 b_{11} c_1 & a_2 b_{12} c_1 \\ a_1 b_{11} c_2 & a_1 b_{12} c_2 & a_2 b_{11} c_2 & a_2 b_{12} c_2 \\ a_1 b_{21} c_1 & a_1 b_{22} c_1 & a_2 b_{21} c_1 & a_2 b_{22} c_1 \\ a_1 b_{21} c_2 & a_1 b_{22} c_2 & a_2 b_{21} c_2 & a_2 b_{22} c_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Andererseits,

$$\begin{aligned} (A \otimes B) \otimes C \;&=\; \begin{pmatrix} a_1 b_{11} C & a_1 b_{12} C & a_2 b_{11} C & a_2 b_{12} C \\ a_1 b_{21} C & a_1 b_{22} C & a_2 b_{21} C & a_2 b_{22} C \end{pmatrix} \\ &=\; \begin{pmatrix} a_1 b_{11} c_1 & a_1 b_{12} c_1 & a_2 b_{11} c_1 & a_2 b_{12} c_1 \\ a_1 b_{11} c_2 & a_1 b_{12} c_2 & a_2 b_{11} c_2 & a_2 b_{12} c_2 \\ a_1 b_{21} c_1 & a_1 b_{22} c_1 & a_2 b_{21} c_1 & a_2 b_{22} c_1 \\ a_1 b_{21} c_2 & a_1 b_{22} c_2 & a_2 b_{21} c_2 & a_2 b_{22} c_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

und das ist identisch mit $A \otimes (B \otimes C)$.

b) Wir bekommen

$$A \otimes C \;=\; (\, a_1 C \; a_2 C \,) \;=\; \begin{pmatrix} a_1 c_1 & a_2 c_1 \\ a_1 c_2 & a_2 c_2 \end{pmatrix}$$

Andererseits,

$$C \otimes A \;=\; \begin{pmatrix} c_1 A \\ c_2 A \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} a_1 c_1 & a_2 c_1 \\ a_1 c_2 & a_2 c_2 \end{pmatrix}$$

Okay, das ist offensichtlich identisch.. Nehmen wir ein $D = (d_1\ d_2)$. Dann

$$
\begin{aligned}
A \otimes D &= (\, a_1 D\ a_2 D \,) = \begin{pmatrix} a_1 d_1 & a_1 d_2 & a_2 d_1 & a_2 d_2 \end{pmatrix} \\
D \otimes A &= (\, d_1 A\ d_2 A \,) = \begin{pmatrix} a_1 d_1 & a_2 d_1 & a_1 d_2 & a_2 d_2 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

also

$$A \otimes D \neq D \otimes A$$

c) Wir haben

$$
\begin{aligned}
Ax &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{pmatrix} \\
By &= \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11}y_1 + b_{12}y_2 \\ b_{21}y_1 + b_{22}y_2 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

und damit

$$
(Ax) \otimes (By) = \begin{pmatrix} (a_{11}x_1 + a_{12}x_2)(By) \\ (a_{21}x_1 + a_{22}x_2)(By) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (a_{11}x_1 + a_{12}x_2)(b_{11}y_1 + b_{12}y_2) \\ (a_{11}x_1 + a_{12}x_2)(b_{21}y_1 + b_{22}y_2) \\ (a_{21}x_1 + a_{22}x_2)(b_{11}y_1 + b_{12}y_2) \\ (a_{21}x_1 + a_{22}x_2)(b_{21}y_1 + b_{22}y_2) \end{pmatrix}
$$

Andererseits,

$$
(A \otimes B) = \begin{pmatrix} a_{11}B & a_{12}B \\ a_{21}B & a_{22}B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} & a_{11}b_{12} & a_{12}b_{11} & a_{12}b_{12} \\ a_{11}b_{21} & a_{11}b_{22} & a_{12}b_{21} & a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} & a_{21}b_{12} & a_{22}b_{11} & a_{22}b_{12} \\ a_{21}b_{21} & a_{21}b_{22} & a_{22}b_{21} & a_{22}b_{22} \end{pmatrix}
$$

und

$$
x \otimes y = \begin{pmatrix} x_1 y \\ x_2 y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 y_1 \\ x_1 y_2 \\ x_2 y_1 \\ x_2 y_2 \end{pmatrix}
$$

und damit

$$
\begin{aligned}
(A \otimes B)(x \otimes y) &= \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} & a_{11}b_{12} & a_{12}b_{11} & a_{12}b_{12} \\ a_{11}b_{21} & a_{11}b_{22} & a_{12}b_{21} & a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} & a_{21}b_{12} & a_{22}b_{11} & a_{22}b_{12} \\ a_{21}b_{21} & a_{21}b_{22} & a_{22}b_{21} & a_{22}b_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 y_1 \\ x_1 y_2 \\ x_2 y_1 \\ x_2 y_2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a_{11}x_1b_{11}y_1 + a_{11}x_1b_{12}y_2 + a_{12}x_2b_{11}y_1 + a_{12}x_2b_{12}y_2 \\ a_{11}x_1b_{21}y_1 + a_{11}x_1b_{22}y_2 + a_{12}x_2b_{21}y_1 + a_{12}x_2b_{22}y_2 \\ a_{21}x_1b_{11}y_1 + a_{21}x_1b_{12}y_2 + a_{22}x_2b_{11}y_1 + a_{22}x_2b_{12}y_2 \\ a_{21}x_1b_{21}y_1 + a_{21}x_1b_{22}y_2 + a_{22}x_2b_{21}y_1 + a_{22}x_2b_{22}y_2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a_{11}x_1(b_{11}y_1 + b_{12}y_2) + a_{12}x_2(b_{11}y_1 + b_{12}y_2) \\ a_{11}x_1(b_{21}y_1 + b_{22}y_2) + a_{12}x_2(b_{21}y_1 + b_{22}y_2) \\ a_{21}x_1(b_{11}y_1 + b_{12}y_2) + a_{22}x_2(b_{11}y_1 + b_{12}y_2) \\ a_{21}x_1(b_{21}y_1 + b_{22}y_2) + a_{22}x_2(b_{21}y_1 + b_{22}y_2) \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

und das ist identisch mit $(Ax) \otimes (By)$.

d) Es gelte

$$\begin{aligned} Av_i &= \lambda_i \, v_i \\ Bw_j &= \mu_j \, w_j \end{aligned}$$

Dann gilt nach Teil (c)

$$(A \otimes B)\,(v_i \otimes w_j) \;=\; (Av_i) \otimes (Bw_j) \;=\; (\lambda_i v_i) \otimes (\mu_j w_j) \;=\; \lambda_i \mu_j \, v_i \otimes w_j$$

also ist $A \otimes B$ diagonalisierbar mit Eigenwerten $\{\, \lambda_i \mu_j \,\}_{1 \le i \le n,\, 1 \le j \le m}$.

e) Wegen

$$A \otimes B \;=\; \begin{pmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \cdots & a_{1m}B \\ a_{21}B & a_{22}B & \cdots & a_{2m}B \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}B & a_{m2}B & \cdots & a_{mm}B \end{pmatrix} \tag{1}$$

ist die Hauptdiagonale von $A \otimes B$ gegeben durch

$$\begin{aligned} \mathrm{diag}(A \otimes B) &= \big(\, a_{11}\,\mathrm{diag}(B)\,,\; a_{22}\,\mathrm{diag}(B)\,,\; \cdots\,,\; a_{mm}\,\mathrm{diag}(B)\,\big) \\ \mathrm{diag}(B) &= (b_{11}, \cdots, b_{nn}) \end{aligned}$$

falls etwa A eine $m \times m$ und B eine $n \times n$ Matrix ist. Also

$$\begin{aligned} Tr(A \otimes B) &= a_{11} \textstyle\sum_{j=1}^n b_{jj} \;+\; a_{22} \sum_{j=1}^n b_{jj} \;+\; \cdots \;+\; a_{mm} \sum_{j=1}^n b_{jj} \\ &= \big(\textstyle\sum_{i=1}^m a_{ii} \big) \big(\sum_{j=1}^n b_{jj} \big) \\ &= TrA \cdot TrB \end{aligned}$$

und der Teil (e) ist bewiesen.