week12: Kapitel 3.3: Die Hamilton-Jakobi-Gleichung

Das klassische Wirkungsintegral

Das klassische Wirkungsintegral oder einfach die klassische Wirkung (klassisch meint hier nicht quantenmechanisch, in der QM wird diese Grösse ebenfalls diskutiert) ist gegeben durch

$$S \;=\; \int_{t_0}^{t} L(q_s,\dot q_s)\, ds \tag{1}$$

wobei das $L = L(q_t,\dot q_t)$ die Lagrange-Funktion eines mechanischen Systems ist und das $q_t = (q_{1,t},\cdots,q_{f,t})$ eine Lösung der Euler-Lagrange-Gleichung ist,

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} \;=\; 0 \qquad \forall j = 1,\cdots,f \tag{2}$$

Schauen wir uns zunächst ein Beispiel an (ein Beispiel 2 gibt es auf dem neuen Ü-Blatt 12):

Beispiel 1: Bewegung im Schwerefeld der Erde: Die Bewegungsgleichung ist

$$m\ddot{\vec x} \;=\; m\begin{pmatrix}\ddot x\\ \ddot y\\ \ddot z\end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix}0\\ 0\\ -mg\end{pmatrix} \tag{3}$$

oder

$$\ddot{\vec x} \;=\; -g\,\vec e_z \tag{4}$$

mit $\vec e_z = (0,0,1)$ und den Anfangsbedingungen, sagen wir,

$$\begin{aligned}\vec x_{t=0} &= \vec x_0\\ \dot{\vec x}_{t=0} &= \vec v_0\end{aligned} \tag{5}$$

Wir bekommen

$$\begin{aligned}\dot{\vec x}_t &= \vec v_0 - gt\,\vec e_z\\ \vec x_t &= \vec x_0 + \vec v_0\,t - \tfrac{gt^2}{2}\,\vec e_z\end{aligned} \tag{6}$$

Die Lagrange-Funktion ist gegeben durch

$$\begin{aligned}L(\vec x_t,\dot{\vec x}_t) &= \tfrac{m}{2}\,\dot{\vec x}_t^{\,2} - mgz_t\\ &= \tfrac{m}{2}\left[\vec v_0 - gt\,\vec e_z\right]^2 - mg\left[\vec x_0 + \vec v_0\,t - \tfrac{gt^2}{2}\,\vec e_z\right]_3\end{aligned} \tag{7}$$

oder

$$L(\vec{x}_t, \dot{\vec{x}}_t) \,/\, m \;=\; \tfrac{1}{2} \left\{ \vec{v}_0^{\,2} \,-\, 2gt\, v_{0,z} \,+\, g^2 t^2 \right\} \,-\, g \left\{ z_0 \,+\, v_{0,z}\, t \,-\, \tfrac{gt^2}{2} \right\} \tag{8}$$

Also,

$$\begin{aligned} S/m &= \textstyle\int_{t_0:=0}^{t} L(q_s, \dot{q}_s)/m \; ds \\ &= \tfrac{1}{2} \left\{ \vec{v}_0^{\,2}\, t \,-\, g\, t^2\, v_{0,z} \,+\, g^2\, \tfrac{t^3}{3} \right\} \,-\, g \left\{ z_0\, t \,+\, v_{0,z}\, \tfrac{t^2}{2} \,-\, g\, \tfrac{t^3}{6} \right\} \\ &= \tfrac{1}{2}\, \vec{v}_0^{\,2}\, t \,-\, g\, t^2\, v_{0,z} \,-\, g\, t\, z_0 \,+\, g^2\, \tfrac{t^3}{3} \end{aligned} \tag{9}$$

Offensichtlich hängt das S ab von den Anfangsbedingungen $\vec{x}_0$ und $\vec{v}_0$ und dem betrachteten Zeithorizont t, das wird immer so sein. Jetzt wollen wir das $\vec{v}_0$ aus (9) entfernen und dafür den Endpunkt $\vec{x}_t$ gegeben durch Gleichung (6) in das S reinschreiben. Also wir wollen die Gleichung

$$\vec{x}_t \;=\; \vec{x}_t(\vec{x}_0, \vec{v}_0) \;=\; \vec{x}_0 \,+\, \vec{v}_0\, t \,-\, \tfrac{gt^2}{2}\, \vec{e}_z \tag{10}$$

nach $\vec{v}_0$ auflösen,

$$\vec{v}_0 \;=\; \vec{v}_0(\vec{x}_0, \vec{x}_t, t) \;=\; \frac{\vec{x}_t \,-\, \vec{x}_0 \,+\, \tfrac{gt^2}{2}\, \vec{e}_z}{t} \;=\; \frac{\vec{x}_t \,-\, \vec{x}_0}{t} \,+\, \frac{gt}{2}\, \vec{e}_z \tag{11}$$

und das dann in das S einsetzen, dann bekommen wir eine Funktion, die nur noch vom Startpunkt $\vec{x}_0$, vom Endpunkt $\vec{x}_t$ der tatsächlich durchlaufenden Bahnkurve $\{\vec{x}_s\}_{0\leq s\leq t}$ und dem Zeithorizont t abhängt:

$$S/m \;=\; S(\vec{x}_0, \vec{x}_t, t)/m \;=\; \tfrac{t}{2} \left[\vec{v}_0(\vec{x}_0, \vec{x}_t, t)\right]^2 \,-\, gt^2 \left[\vec{v}_0(\vec{x}_0, \vec{x}_t, t)\right]_z \,-\, gt\, z_0 \,+\, \tfrac{g^2 t^3}{3} \tag{12}$$

oder, wenn wir das $\vec{v}_0(\vec{x}_0, \vec{x}_t, t)$ aus Gleichung (11) konkret einsetzen,

$$\begin{aligned} S(\vec{x}_0, \vec{x}_t, t)/m &= \tfrac{t}{2} \left[\tfrac{\vec{x}_t - \vec{x}_0}{t} \,+\, \tfrac{gt}{2}\, \vec{e}_z \right]^2 \,-\, gt^2 \left[\tfrac{\vec{x}_t - \vec{x}_0}{t} \,+\, \tfrac{gt}{2}\, \vec{e}_z \right]_z \,-\, gt\, z_0 \,+\, \tfrac{g^2 t^3}{3} \\ &= \tfrac{(\vec{x}_t - \vec{x}_0)^2}{2t} \,+\, \tfrac{gt}{2}\, (z_t - z_0) \,+\, \tfrac{g^2 t^3}{8} \,-\, gt(z_t - z_0) \,-\, \tfrac{g^2 t^3}{2} \,-\, gt\, z_0 \,+\, \tfrac{g^2 t^3}{3} \\ &= \tfrac{(\vec{x}_t - \vec{x}_0)^2}{2t} \,-\, \tfrac{gt}{2}\, (z_t - z_0) \,+\, \tfrac{3g^2 t^3}{24} \,-\, \tfrac{12 g^2 t^3}{24} \,-\, gt\, z_0 \,+\, \tfrac{8 g^2 t^3}{24} \\ &= \tfrac{(\vec{x}_t - \vec{x}_0)^2}{2t} \,-\, \tfrac{gt}{2}\, (z_t + z_0) \,-\, \tfrac{g^2 t^3}{24} \end{aligned} \tag{13}$$

Also,

$$S(\vec{x}_0, \vec{x}_t, t) \;=\; \tfrac{m}{2} \left\{ \tfrac{(\vec{x}_t - \vec{x}_0)^2}{t} \,-\, gt\, (z_t + z_0) \,-\, \tfrac{g^2 t^3}{12} \right\} \tag{14}$$

Hamilton-Jacobi-Gleichung

Kehren wir zum allgemeinen Setting zurück gegeben durch (1) und (2). Die Hamilton-Funktion ist

$$H \;=\; \sum_{j=1}^{f} \tfrac{\partial L}{\partial \dot q_j}\, \dot q_j \;-\; L \tag{15}$$

Das ist zunächst mal, genauso wie das $L = L(q_t, \dot q_t)$, ebenfalls eine Funktion von q_t und $\dot q_t$. Im Kapitel 3.1 hatten wir gesehen, dass die natürlichen Variablen für die Hamilton-Funktion die $q_{j,t}$ und die verallgemeinerten Impulse

$$p_{j,t} \;:=\; \tfrac{\partial L}{\partial \dot q_j} \tag{16}$$

sind, die $\dot q_{j,t}$ kann man, zumindest im Prinzip, aus den Gleichungen (16) als Funktion der $q_{j,t}$ und $p_{j,t}$ schreiben und dann in das H einsetzen, wir haben dann also

$$H \;=\; \sum_{j=1}^{f} p_{j,t}\, \dot q_{j,t} \;-\; L\big(\, q_t\,,\, \dot q(q_t, p_t)\,\big) \;=\; H(q_t, p_t) \tag{17}$$

Berechnen wir eben die Hamilton-Funktion für das Beispiel 1:

Beispiel 1, Hamilton-Funktion: Mit

$$L(\vec x_t, \dot{\vec x}_t) \;=\; \tfrac{m}{2}\, \dot{\vec x}_t^{\,2} \;-\; mgz_t \;=\; \tfrac{m}{2}\,[\, \dot x_t^2 \,+\, \dot y_t^2 \,+\, \dot z_t^2 \,] \,-\, mg\, z_t \tag{18}$$

bekommen wir

$$\begin{aligned} p_{x,t} &= m\dot x_t \\ p_{y,t} &= m\dot y_t \\ p_{z,t} &= m\dot z_t \end{aligned} \tag{19}$$

und

$$H(\vec x_t, \vec p_t) \;=\; \tfrac{\vec p_t^{\,2}}{2m} \;+\; mgz_t \;=\; \tfrac{1}{2m}\,[\, p_{x,t}^2 \,+\, p_{y,t}^2 \,+\, p_{z,t}^2 \,] \,+\, mg\, z_t \tag{20}$$

Die Hamilton-Jakobi-Gleichung ist dann durch das folgende Theorem gegeben:

Theorem 3.3.1 (Hamilton-Jacobi-Gleichung): Es sei

$$L \;=\; L(q, \dot q) \;=\; L(q_1, \cdots, q_f, \dot q_1, \cdots, \dot q_f) \;:\; \mathbb{R}^{2f} \;\to\; \mathbb{R} \tag{21}$$

eine beliebige Funktion. Es sei $t < +\infty$ eine vorgegebene Zeit und $(q_s, \dot q_s)_{0\le s\le t}$ sei eine Lösung der Euler-Lagrange-Gleichungen

$$\tfrac{d}{dt}\, \tfrac{\partial L}{\partial \dot q_j} \,-\, \tfrac{\partial L}{\partial q_j} \;=\; 0 \quad \forall j = 1, \cdots, f \tag{22}$$

auf dem Intervall $[0,t]$ zu den Anfangsbedingungen

$$(q_{s=0}, \dot{q}_{s=0}) \quad = \quad (q_0, \dot{q}_0) \tag{23}$$

Wir setzen diese Lösung in die Lagrange-Funktion ein und definieren das Wirkungsintegral

$$S \quad = \quad \int_0^t L(q_s, \dot{q}_s)\, ds \quad =: \quad \tilde{S}(q_0, \dot{q}_0, t) \tag{24}$$

was zunächst mal eine Funktion der Anfangsbedingungen und des Zeithorizonts t ist. Wir lösen die Gleichung

$$q_t \quad = \quad q_t(q_0, \dot{q}_0) \tag{25}$$

nach den $\dot{q}_0$ auf,

$$\dot{q}_0 \quad = \quad \dot{q}_0(q_0, q_t) \tag{26}$$

und bekommen dann das Wirkungsintegral (24) als Funktion von q_0, q_t und t:

$$S(q_0, q_t, t) \quad := \quad \tilde{S}\big(\, q_0 \,,\, \dot{q}_0(q_0, q_t) \,,\, t \,\big) \tag{27}$$

Mit der Hamilton-Funktion

$$H \quad = \quad \sum_{j=1}^f p_{j,t}\, \dot{q}_{j,t} \;-\; L\big(\, q_t \,,\, \dot{q}(q_t, p_t) \,\big) \quad = \quad H(q_t, p_t) \tag{28}$$

und den verallgemeinerten Impulsen (16) gilt dann:

$$\nabla_{q_t} S \quad = \quad p_t \tag{29}$$

und

$$H\big(\, q_t \,,\, \nabla_{q_t} S(q_0, q_t, t) \,\big) \;+\; \tfrac{\partial S}{\partial t}(q_0, q_t, t) \quad = \quad 0 \tag{30}$$

Die Identität (30) wird als die Hamilton-Jacobi-Gleichung bezeichnet.

Überprüfen wir die Identitäten (29) und (30) zunächst mal für unser Beispiel 1:

Beispiel 1, Hamilton-Jacobi-Gleichung: Das S war gegeben durch (14),

$$S(\vec{x}_0, \vec{x}_t, t) \quad = \quad \tfrac{m}{2} \left\{ \tfrac{(\vec{x}_t - \vec{x}_0)^2}{t} \;-\; gt\,(z_t + z_0) \;-\; \tfrac{g^2 t^3}{12} \right\}$$

und die Hamilton-Funktion hatten wir in (20) berechnet,

$$H(\vec{x}_t, \vec{p}_t) \quad = \quad \tfrac{\vec{p}_t^{\,2}}{2m} \;+\; mgz_t \quad = \quad \tfrac{1}{2m}\,[\, p_{x,t}^2 \;+\; p_{y,t}^2 \;+\; p_{z,t}^2 \,] \;+\; mg\, z_t$$

Wir bekommen

$$\nabla_{\vec{x}_t} S \;=\; \begin{pmatrix} \frac{\partial S}{\partial x_t} \\ \frac{\partial S}{\partial y_t} \\ \frac{\partial S}{\partial z_t} \end{pmatrix} \;=\; m \begin{pmatrix} \frac{x_t - x_0}{t} \\ \frac{y_t - y_0}{t} \\ \frac{z_t - z_0}{t} \;-\; \frac{gt}{2} \end{pmatrix} \;=\; \frac{m}{t} \begin{pmatrix} x_t - x_0 \\ y_t - y_0 \\ z_t - z_0 \;-\; \frac{gt^2}{2} \end{pmatrix} \tag{31}$$

oder

$$\nabla_{\vec{x}_t} S \;=\; \frac{m}{t} \left\{ \vec{x}_t - \vec{x}_0 \;-\; \frac{gt^2}{2}\,\vec{e}_z \right\} \tag{32}$$

Wegen (6),

$$\begin{aligned} \dot{\vec{x}}_t \;&=\; \vec{v}_0 \;-\; gt\,\vec{e}_z \\ \vec{x}_t \;&=\; \vec{x}_0 \;+\; \vec{v}_0\,t \;-\; \frac{gt^2}{2}\,\vec{e}_z \end{aligned}$$

ist

$$\begin{aligned} \vec{x}_t - \vec{x}_0 \;-\; \frac{gt^2}{2}\,\vec{e}_z \;&=\; \vec{v}_0 t \;-\; gt^2\,\vec{e}_z \\ &=\; t\,[\,\vec{v}_0 \;-\; gt\,\vec{e}_z\,] \;=\; t\,\dot{\vec{x}}_t \end{aligned} \tag{33}$$

und damit

$$\nabla_{\vec{x}_t} S \;=\; \frac{m}{t} \left\{ \vec{x}_t - \vec{x}_0 \;-\; \frac{gt^2}{2}\,\vec{e}_z \right\} \;=\; m\,\dot{\vec{x}}_t \;=\; \vec{p}_t \tag{34}$$

Die Identität (29) ist also erfüllt. Die partielle Ableitung von S nach t ist gegeben durch

$$\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial t}(\vec{x}_0, \vec{x}_t, t) \;&=\; \frac{\partial}{\partial t}\,\frac{m}{2} \left\{ \frac{(\vec{x}_t - \vec{x}_0)^2}{t} \;-\; gt\,(z_t + z_0) \;-\; \frac{g^2 t^3}{12} \right\} \\ &=\; \frac{m}{2} \left\{ -\,\frac{(\vec{x}_t - \vec{x}_0)^2}{t^2} \;-\; g\,(z_t + z_0) \;-\; \frac{g^2 t^2}{4} \right\} \end{aligned} \tag{35}$$

Wir müssen zeigen, dass das gleich $-H$ ist. Insbesondere ist das also zeitlich konstant, was auf den ersten Blick natürlich nicht so aussieht. Wir haben

$$\begin{aligned} H(\vec{x}_t, \vec{p}_t) \;&=\; \frac{\vec{p}_t^{\,2}}{2m} \;+\; mgz_t \\ &\overset{(34)}{=}\; \frac{1}{2m}\,(\nabla_{\vec{x}_t} S)^2 \;+\; mgz_t \\ &\overset{(34)}{=}\; \frac{m}{2t^2} \left\{ \vec{x}_t - \vec{x}_0 \;-\; \frac{gt^2}{2}\,\vec{e}_z \right\}^2 \;+\; mgz_t \\ &=\; \frac{m}{2t^2} \left\{ (\vec{x}_t - \vec{x}_0)^2 \;-\; gt^2(z_t - z_0) \;+\; \frac{g^2 t^4}{4} \right\} \;+\; mgz_t \\ &=\; \frac{m}{2} \left\{ \frac{(\vec{x}_t - \vec{x}_0)^2}{t^2} \;-\; g(z_t - z_0) \;+\; \frac{g^2 t^2}{4} \right\} \;+\; mgz_t \\ &=\; \frac{m}{2} \left\{ \frac{(\vec{x}_t - \vec{x}_0)^2}{t^2} \;+\; g(z_t + z_0) \;+\; \frac{g^2 t^2}{4} \right\} \\ &\overset{(35)}{=}\; -\,\frac{\partial S}{\partial t}(\vec{x}_0, \vec{x}_t, t) \end{aligned} \tag{36}$$

also tatsächlich

$$H\big(\,\vec{x}_t\,,\, \nabla_{\vec{x}_t} S(\vec{x}_0, \vec{x}_t, t)\,\big) \;+\; \frac{\partial S}{\partial t}(\vec{x}_0, \vec{x}_t, t) \;=\; 0 \tag{37}$$

Bevor wir einen allgemeinen Beweis der Hamilton-Jacobi-Gleichung angeben, wollen wir noch die folgende Folgerung festhalten.

Folgerung: Die Lagrange Funktion $L = L(q, \dot{q})$ hänge nicht explizit von der Zeit ab. Dann ist das H eine Konstante der Bewegung und wir können schreiben

$$\tfrac{\partial S}{\partial t}(q_0, q_t, t) \;=\; -H \;=\; -E \tag{38}$$

und damit

$$S(q_0, q_t, t) \;=\; -Et \;+\; W(q_0, q_t) \tag{39}$$

mit einer Funktion $W = W(q_0, q_t)$, die nicht explizit von der Zeit abhängt. Für das W muss dann gelten (wir setzen das S aus (39) in die Hamilton-Jacobi-Gleichung (30) ein)

$$H\big(\, q_t \,,\, \nabla_{q_t} W(q_0, q_t)\big) \;=\; E \;. \tag{40}$$

Beweis Theorem 3.3.1: Mit

$$S \;=\; \textstyle\int_0^t L(q_s, \dot{q}_s)\, ds \;=:\; \tilde{S}(q_0, \dot{q}_0, t) \;=\; S(q_0, q_t, t) \tag{41}$$

bekommen wir

$$\tfrac{dS}{dt} \;=\; L(q_t, \dot{q}_t) \;=\; \tfrac{d}{dt}\, S(q_0, q_t, t) \;=\; \textstyle\sum_{j=1}^{f} \tfrac{\partial S}{\partial q_{j,t}}\, \dot{q}_{j,t} \;+\; \tfrac{\partial S}{\partial t} \tag{42}$$

Nehmen wir an, wir haben die Identität (29)

$$\nabla_{q_t} S \;=\; p_t$$

schon gezeigt. Dann folgt aus (42)

$$L(q_t, \dot{q}_t) \;=\; \textstyle\sum_{j=1}^{f} p_{j,t}\, \dot{q}_{j,t} \;+\; \tfrac{\partial S}{\partial t} \tag{43}$$

oder

$$\tfrac{\partial S}{\partial t} \;=\; L(q_t, \dot{q}_t) \;-\; \textstyle\sum_{j=1}^{f} p_{j,t}\, \dot{q}_j \;=\; -H \tag{44}$$

und das ist genau die Hamilton-Jacobi-Gleichung, also müssen wir nur noch die Identität (29) zeigen: Nach Definition der partiellen Ableitung ist (mit $e_j = (0, \cdots, 1, \cdots, 0)$ der j-te Standardbasisvektor)

$$\frac{\partial S}{\partial q_{j,t}}(q_0, q_t, t) \;=\; \lim_{\Delta q \to 0} \frac{S(\, q_0 \,,\, q_t + \Delta q\, e_j \,,\, t\,) \;-\; S(q_0, q_t, t)}{\Delta q}$$

Wir brauchen etwas Notation: Es sei

$$\{\, q_s \,\}_{0\le s\le t} \;\;=:\;\; \{\, q_s^{(t,q_t)} \,\}_{0\le s\le t}$$

der extremale Pfad, der zur Berechnung von $S(q_0, q_t, t)$ verwendet werden muss. Für diesen Pfad gilt also

$$\begin{aligned} q_{s=0}^{(t,q_t)} &= q_0 \\ q_{s=t}^{(t,q_t)} &= q_t \end{aligned}$$

und

$$\tfrac{d}{ds}\,\tfrac{\partial L}{\partial \dot q_{i,s}} \;-\; \tfrac{\partial L}{\partial q_{i,s}} \;=\; 0$$

für alle $s \in [0,t]$. Zur Berechnung von $S(q_0, q_t + \Delta q\, e_j, t)$ brauchen wir einen neuen Pfad

$$\{\, q_s^{(t,q_t+\Delta q)} \,\}_{0\le s\le t}$$

der soll ja in derselben Zeit bei gleichem Startpunkt einen anderen Zielpunkt erreichen, nämlich

$$\begin{aligned} q_{s=0}^{(t,q_t+\Delta q)} &= q_0 \\ q_{s=t}^{(t,q_t+\Delta q)} &= q_t + \Delta q\, e_j \end{aligned}$$

Das geht nur dadurch, dass wir andere Anfangsgeschwindigkeiten wählen. Der neue Pfad muss dann ebenfalls eine Lösung der Euler-Lagrange-Gleichung sein. Wir haben dann

$$\begin{aligned} \Delta_j S \;&:=\; S(\, q_0 \,,\, q_t + \Delta q\, e_j \,,\, t\,) \;-\; S(q_0, q_t, t) \\ &=\; \textstyle\int_{t_0}^t L\big(\, q_s^{(t,q_t+\Delta q)} \,,\, \dot q_s^{(t,q_t+\Delta q)} \big)\, ds \;-\; \int_{t_0}^t L\big(\, q_s^{(t,q_t)} \,,\, \dot q_s^{(t,q_t)} \big)\, ds \\ &=\; \textstyle\int_{t_0}^t \Big[\, L\big(\, q_s^{(t,q_t+\Delta q)} \,,\, \dot q_s^{(t,q_t+\Delta q)} \big) \;-\; L\big(\, q_s^{(t,q_t)} \,,\, \dot q_s^{(t,q_t)} \big) \Big]\, ds \end{aligned}$$

Wir definieren den Pfad

$$\eta_s^{\Delta q} \;\;:=\;\; q_s^{(t,q_t+\Delta q)} \;-\; q_s^{(t,q_t)}$$

mit

$$\begin{aligned} \eta_{s=0}^{\Delta q} \;&=\; q_0^{(t,q_t+\Delta q)} \;-\; q_0^{(t,q_t)} \;=\; q_0 - q_0 \;=\; 0 \\ \eta_{s=t}^{\Delta q} \;&=\; q_t^{(t,q_t+\Delta q)} \;-\; q_t^{(t,q_t)} \;=\; q_t + \Delta q\, e_j \;-\; q_t \;=\; \Delta q\, e_j \end{aligned}$$

Dann können wir schreiben

$$\begin{aligned} & L\big(\, q_s^{(t,q_t+\Delta q)} \,,\, \dot q_s^{(t,q_t+\Delta q)} \big) \;-\; L\big(\, q_s^{(t,q_t)} \,,\, \dot q_s^{(t,q_t)} \big) \\ &\quad=\; \sum_{i=1}^{f} \Big\{\, \tfrac{\partial L}{\partial q_{i,s}}(q_s, \dot q_s)\, \eta_{i,s}^{\Delta q} \;+\; \tfrac{\partial L}{\partial \dot q_{i,s}}(q_s, \dot q_s)\, \dot\eta_{i,s}^{\Delta q} \Big\} \;+\; O\big[(\Delta q)^2\big] \end{aligned}$$

und damit, bis auf Terme von der Grössenordnung $O\big[(\Delta q)^2\big]$,

$$\begin{aligned}
\Delta_j S \;&=\; \sum_{i=1}^{f} \int_{t_0}^{t} \Big\{ \tfrac{\partial L}{\partial q_{i,s}}(q_s,\dot q_s)\,\eta_{i,s}^{\Delta q} \;+\; \tfrac{\partial L}{\partial \dot q_{i,s}}(q_s,\dot q_s)\,\dot\eta_{i,s}^{\Delta q} \Big\}\, ds \\
&=\; \sum_{i=1}^{f} \int_{t_0}^{t} \Big\{ \tfrac{\partial L}{\partial q_{i,s}}(q_s,\dot q_s)\,\eta_{i,s}^{\Delta q} \;-\; \tfrac{d}{ds}\tfrac{\partial L}{\partial \dot q_{i,s}}(q_s,\dot q_s)\,\eta_{i,s}^{\Delta q} \Big\}\, ds \;+\; \sum_{i=1}^{f} \tfrac{\partial L}{\partial \dot q_{i,s}}(q_s,\dot q_s)\,\eta_{i,s}^{\Delta q}\Big|_{s=0}^{s=t} \\
&=\; \sum_{i=1}^{f} \int_{t_0}^{t} \Big\{ \tfrac{\partial L}{\partial q_s}(q_s,\dot q_s) \;-\; \tfrac{d}{ds}\tfrac{\partial L}{\partial \dot q_s}(q_s,\dot q_s) \Big\}\,\eta_s^{\Delta q}\, ds \;+\; \sum_{i=1}^{f} \tfrac{\partial L}{\partial \dot q_{i,t}}(q_t,\dot q_t)\,\eta_{i,t}^{\Delta q} \\
&=\; 0 \;+\; \tfrac{\partial L}{\partial \dot q_{j,t}}(q_t,\dot q_t)\,\Delta q \\
&=\; 0 \;+\; p_{j,t}\,\Delta q
\end{aligned}$$

Also,

$$\frac{\partial S}{\partial q_{j,t}} \;=\; \lim_{\Delta q\to 0} \frac{\Delta_j S}{\Delta q} \;=\; \lim_{\Delta q\to 0} \frac{p_{j,t}\,\Delta q \;+\; O\big[(\Delta q)^2\big]}{\Delta q} \;=\; p_{j,t}$$

und das Theorem ist bewiesen. ■

Die Hamilton-Jacobi-Gleichung ist eher von theoretischem Interesse, mit ihr lässt sich vielleicht am einfachsten der Übergang von der Quantenmechanik zur klassischen Mechanik verstehen. Zum Lösen von konkreten Problemen ist die Hamilton-Jacobi-Gleichung eher weniger geeignet.