

## week9: Kapitel 6: Das zeitdiskrete Black-Scholes Modell, Teil2

Das zeitdiskrete Black-Scholes Modell war gegeben durch die Preisdynamik

$$S_{t_k} = S_{t_{k-1}} (1 + \mu \Delta t + \sigma \sqrt{\Delta t} \phi_k) \quad (1)$$

mit  $t_k = k\Delta t$  und reellen Konstanten  $\mu$  und  $\sigma$  und unabhängigen, standard-normalverteilten Zufallszahlen  $\{\phi_k\}_{k=1}^N$ . Wir hatten gesehen, dass für kleine  $\Delta t$  die stochastische Rekursion (1) durch den folgenden Ausdruck gelöst wird, der auch als geometrische Brownsche Bewegung bezeichnet wird:

$$S_{t_k} = S_{t_0} \exp \left\{ \sigma x_{t_k} + \left( \mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) t_k \right\} \quad (2)$$

wobei das  $x_{t_k}$ , eine Brownsche Bewegung in diskreter Zeit, die folgende Kombination von standard-normalverteilten Zufallszahlen ist,

$$x_{t_k} = \sqrt{\Delta t} \sum_{j=1}^k \phi_j$$

Wir wollen uns zunächst an das folgende Theorem erinnern, was besagt, dass die Summe von normalverteilten Zufallszahlen wieder normalverteilt ist, und was typischerweise in einer Stochastik-Vorlesung bewiesen wird. In der Stochastik II Vorlesung aus dem SS2021 wurde das etwa in dem Theorem 2.2.1 in dem week3a.pdf gemacht, <http://hsrm-mathematik.de/SS2021/semester4/Stochastik2/week3a.pdf> :

**Theorem (Summe von normalverteilten Zufallszahlen):** Es seien  $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n$  normalverteilte Zufallsvariablen mit Mittelwerten  $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$  und Standardabweichungen  $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$ . Dann gilt: Die Summe

$$\phi := \phi_1 + \phi_2 + \dots + \phi_n$$

ist normalverteilt mit Mittelwert

$$\mu = \mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_n$$

und Varianz

$$\sigma^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \dots + \sigma_n^2$$

Das heisst genauer, für eine beliebige Funktion  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  gilt

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(\phi_1 + \dots + \phi_n) \prod_{k=1}^n e^{-\frac{(\phi_k - \mu_k)^2}{2\sigma_k^2}} \frac{d\phi_k}{\sqrt{2\pi\sigma_k^2}} = \int_{\mathbb{R}} f(\phi) e^{-\frac{(\phi - \mu)^2}{2\sigma^2}} \frac{d\phi}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}. \quad (3)$$

Als unmittelbare Konsequenz daraus können wir zunächst mal das folgende Theorem festhalten:

**Theorem 6.3:** Es seien  $\{\phi_k\}_{k=1}^N$  eine Folge von unabhängigen, standard-normalverteilten Zufallszahlen und

$$x_{t_k} = \sqrt{\Delta t} \sum_{j=1}^k \phi_j$$

sei eine Brownsche Bewegung in diskreter Zeit mit  $t_k = k\Delta t$ . Dann gilt für beliebige Funktionen  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$\mathbb{E}[f(x_{t_k})] = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-\frac{x^2}{2t_k}} \frac{dx}{\sqrt{2\pi t_k}} \quad (4)$$

**Beweis:** Wir wenden das Theorem 2.2.1 aus der Stochastik II an mit  $n = k$  und

$$\begin{aligned} \mu &= \mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_k \\ &= 0 + 0 + \dots + 0 = 0 \end{aligned}$$

und Varianz

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \dots + \sigma_k^2 \\ &= 1 + 1 + \dots + 1 = k \end{aligned}$$

und bekommen

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[f(x_{t_k})] &= \int_{\mathbb{R}^k} f\left(\sqrt{\Delta t} (\phi_1 + \dots + \phi_k)\right) \prod_{j=1}^k e^{-\frac{\phi_j^2}{2}} \frac{d\phi_j}{\sqrt{2\pi}} \\ &\stackrel{(3)}{=} \int_{\mathbb{R}} f\left(\sqrt{\Delta t} \phi\right) e^{-\frac{(\phi-0)^2}{2k}} \frac{d\phi}{\sqrt{2\pi k}} \\ &\stackrel{x:=\sqrt{\Delta t} \phi}{=} \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-\frac{x^2}{2k\Delta t}} \frac{dx}{\sqrt{2\pi k\Delta t}} \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-\frac{x^2}{2t_k}} \frac{dx}{\sqrt{2\pi t_k}} \end{aligned}$$

und das Theorem ist bewiesen. ■

Wir wollen jetzt das zeitdiskrete Black-Scholes Modell (1) durch ein Binomial-Modell approximieren. Das zeitdiskrete Black-Scholes Modell hat die Returns

$$\text{ret}_{t_k} = \mu \Delta t + \sigma \sqrt{\Delta t} \phi_k$$

mit  $\mathbb{E}[\phi_k] = 0$  und  $\mathbb{V}[\phi_k] = 1$ . Diese Returns wollen wir ersetzen durch Returns, die nur zwei Einstellungsmöglichkeiten  $\text{ret}_{\text{up}}$  und  $\text{ret}_{\text{down}}$  zulassen. Die folgende Wahl bietet sich an:

$$\begin{aligned} \text{ret}_{\text{up}} &:= \mu \Delta t + \sigma \sqrt{\Delta t} \\ \text{ret}_{\text{down}} &:= \mu \Delta t - \sigma \sqrt{\Delta t} \end{aligned}$$

oder etwas anders geschrieben

$$\text{ret}_{t_k} = \mu \Delta t + \sigma \sqrt{\Delta t} \varepsilon_k \quad (5)$$

mit den Zufallszahlen

$$\varepsilon_k := \begin{cases} +1 & \text{mit W'keit } 1/2 \\ -1 & \text{mit W'keit } 1/2 \end{cases} \quad (6)$$

Wir haben dann ebenfalls

$$\mathbb{E}[\varepsilon_k] = +1 \times \frac{1}{2} + (-1) \times \frac{1}{2} = 0$$

und

$$\begin{aligned} \mathbb{V}[\varepsilon_k] &= \mathbb{E}[\varepsilon_k^2] - (\mathbb{E}[\varepsilon_k])^2 = \mathbb{E}[\varepsilon_k^2] \\ &= (+1)^2 \times \frac{1}{2} + (-1)^2 \times \frac{1}{2} = 1 \end{aligned}$$

Wir betrachten also das  $N$ -Perioden Binomialmodell mit Preisdynamik

$$S_{t_k} = S_{t_{k-1}} (1 + \mu \Delta t + \sigma \sqrt{\Delta t} \varepsilon_k) \quad (7)$$

Wenn sich  $\ell$  up>Returns realisiert haben, ist der Preis  $S_{t_N}$  gegeben durch

$$S_{N,\ell} = S_0 (1 + \mu \Delta t + \sigma \sqrt{\Delta t})^\ell (1 + \mu \Delta t - \sigma \sqrt{\Delta t})^{N-\ell}$$

Erwartungswerte in diesem Binomialmodell sind dann gegeben durch

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[f(S_{t_N})] &= \mathbb{E}\left[f\left(S_0 \prod_{j=1}^N (1 + \text{ret}_j)\right)\right] \\ &= \sum_{\ell=0}^N f(S_{N,\ell}) \times \text{Prob}[\text{es gibt } \ell \text{ up-returns}] \\ &= \sum_{\ell=0}^N f(S_{N,\ell}) \times \binom{N}{\ell} \times \left(\frac{1}{2}\right)^\ell \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{N-\ell} \\ &= \sum_{\ell=0}^N f(S_{N,\ell}) \times \frac{1}{2^N} \binom{N}{\ell} =: \mathbb{E}^{\text{Bin}}[f(S_{t_N})] \end{aligned} \quad (8)$$

während Erwartungswerte im zeitdiskreten Black-Scholes Modell gegeben sind durch

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[f(S_{t_N})] &= \mathbb{E}\left[f\left(S_0 \prod_{j=1}^N (1 + \text{ret}_j)\right)\right] \\ &\stackrel{\Delta t \rightarrow 0}{=} \mathbb{E}\left[f\left(S_0 \exp\left\{\sigma x_{t_N} + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t_N\right\}\right)\right] \\ &\stackrel{\text{Thm 6.3}}{=} \int_{\mathbb{R}} f\left(S_0 \exp\left\{\sigma x + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t_N\right\}\right) e^{-\frac{x^2}{2t_N}} \frac{dx}{\sqrt{2\pi t_N}} \\ &=: \mathbb{E}^{\text{BS}}[f(S_{t_N})] \end{aligned} \quad (9)$$

Es gilt nun das folgende

**Theorem 6.4:** Es sei  $T = t_N = N\Delta t$  ein fester Zeithorizont. Wir betrachten den Grenzwert  $\Delta t \rightarrow 0$ ,  $N \rightarrow \infty$  mit  $T = N\Delta t$  fest. Für eine beliebige Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  sei  $\mathbf{E}^{\text{BS}}[\cdot]$  der Erwartungswert im zeitdiskreten Black-Scholes Modell gegeben durch (9) und  $\mathbf{E}^{\text{Bin}}[\cdot]$  sei der Erwartungswert im approximierenden Binomialmodell gegeben durch (8). Dann gilt:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \mathbf{E}^{\text{Bin}}[f(S_T)] = \mathbf{E}^{\text{BS}}[f(S_T)] \quad (10)$$

oder explizit

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \sum_{\ell=0}^N f(S_{N,\ell}) \times \frac{1}{2^N} \binom{N}{\ell} = \int_{\mathbb{R}} f\left(S_0 \exp\left\{\sigma x + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)T\right\}\right) e^{-\frac{x^2}{2T}} \frac{dx}{\sqrt{2\pi T}} \quad (11)$$

mit

$$S_{N,\ell} = S_0 (1 + \mu \Delta t + \sigma \sqrt{\Delta t})^\ell (1 + \mu \Delta t - \sigma \sqrt{\Delta t})^{N-\ell} \quad (12)$$

**Beweis:** Machen wir dann nächste Woche. Wesentliches Hilfsmittel ist das Resultat aus der ersten Aufgabe vom aktuellen Übungsblatt 9, das ist die folgende Formel: Für eine beliebige Funktion  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  gilt

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{\ell=0}^N F\left(\frac{2\ell-N}{\sqrt{N}}\right) \times \frac{1}{2^N} \binom{N}{\ell} = \int_{-\infty}^{\infty} F(x) e^{-\frac{x^2}{2}} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} \quad (13)$$