week8: Kapitel 6: Das zeitdiskrete Black-Scholes Modell

Es sei S_{t_k} der Preis eines liquide handelbaren Assets zur Zeit t_k. Die Returns ret_{t_k} waren definiert durch

$$\mathrm{ret}_{t_k} \;:=\; \frac{S_{t_k} - S_{t_{k-1}}}{S_{t_{k-1}}} \tag{1}$$

so dass wir auch schreiben können

$$S_{t_k} \;=\; S_{t_{k-1}}\,(\,1 + \mathrm{ret}_{t_k}\,) \tag{2}$$

Aus Gleichung (2) folgt dann durch wiederholte Anwendung oder durch Induktion die Formel

$$S_{t_N} \;=\; S_{t_0}\,\prod_{k=1}^{N}(\,1 + \mathrm{ret}_{t_k}\,) \tag{3}$$

Durch Angabe der Returns $\{\mathrm{ret}_{t_k}\}_{k=1}^N$ sind also die Asset-Preise $\{S_{t_k}\}_{k=1}^N$ eindeutig festgelegt. Wir wollen zunächst mal ein bischen Gefühl für die Returns von typischen Finanzzeitreihen bekommen und machen eine kleine statistische Analyse. In der zweiten Übung hatten wir Zeitreihendaten für den EuroStoxx50 heruntergeladen, nehmen wir etwa diese Daten. Wir berechnen die täglichen Returns (1), Mittelwert und Standardabweichung der täglichen Returns gegeben durch

$$\mu_{\mathrm{ret}} \;:=\; \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\mathrm{ret}_{t_k} \tag{4}$$

$$\sigma^2_{\mathrm{ret}} \;:=\; \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\big(\,\mathrm{ret}_{t_k} - \mu_{\mathrm{ret}}\,\big)^2 \tag{5}$$

und dann berechnen wir standardisierte oder normierte Returns gegeben durch

$$\mathrm{normret}_{t_k} \;:=\; \frac{\mathrm{ret}_{t_k} - \mu_{\mathrm{ret}}}{\sigma_{\mathrm{ret}}} \tag{6}$$

Wir machen ein Histogramm der standardisierten Returns, skalieren das so, dass die Fläche unter dem Histogramm gleich 1 ist, und plotten dann noch zum Vergleich die Dichte der Standard-Normalverteilung

$$\varphi(x) \;=\; \tfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\,e^{-\frac{x^2}{2}} \tag{7}$$

in dasselbe Histogramm. Wir werden dann sehen, dass die beiden Sachen nicht zu verschieden sind, also machen wir das vielleicht erstmal:

$\rightarrow$ Excelsheet mit EuroStoxx50-Daten

Die Daten, die wir in der zweiten Übung von YahhoFinance downgeloaded hatten, waren für den Zeitraum 2007 - 2021. Da liegen zwei Phasen mit extremer Volatilität drin, nämlich die Finanzkrise 2008-2009, und dann jetzt die jüngsten Daten aus der Corona-Krise aus dem ersten Quartal von 2020. Wenn man nun zwei Sets von normalverteilten Zufallszahlen hat, etwa low volatility returns mit einem $\sigma_1 = 15\%$ und high volatility returns mit einem $\sigma_2 = 60\%$ und nimmt man dann in 90% aller Fälle die low volatility returns und in 10% aller Fälle die high volatility returns, man sagt dann auch, dass man ein Gaussian Mixture Model hat, dann sieht das Histogramm für die standardisierten Returns typischerweise so aus, wie das, was wir gerade für den EuroStoxx50 gesehen haben. Machen wir eben eine kurze R-Simulation dazu:

$\rightarrow$ R-Simulation Histogramm von Gaussian Mixtures

Wenn man also ein wirklich realistisches Modell für die Dynamik von Finanzzeitreihen machen möchte, muss man die Tatsache mit berücksichtigen, dass die Volatilität oder die Standardabweichung der Asset-Returns zeitlichen Schwankungen unterworfen ist, deshalb gibt es so Sachen wie ARCH- und GARCH-Modelle oder Stochastic Volatility Models. Im Black-Scholes Modell tut man das ignorieren und macht die folgende Annahme:

$$\mathrm{normret}_{t_k} \;=\; \frac{\mathrm{ret}_{t_k} \,-\, \mu_{\mathrm{ret}}}{\sigma_{\mathrm{ret}}} \;\approx\; \phi_k \quad \mathrm{standard-normalverteilt} \tag{8}$$

oder

$$\mathrm{ret}_{t_k} \;=\; \mu_{\mathrm{ret}} \,+\, \sigma_{\mathrm{ret}}\,\phi_k \tag{9}$$

mit reellen Konstanten μ_{ret} und σ_{ret} und unabhängigen, standard-normalverteilten Zufallszahlen $\{\phi_k\}_{k=1}^N$.

Die EuroStoxx50-Daten, die wir gerade analysiert haben, waren tägliche Schlusskurse, also die t_k sind Tage,

$$\Delta t \;:=\; t_k - t_{k-1} \;=\; 1\ \mathrm{Tag} \;\approx\; \frac{1}{250}\ \mathrm{Jahr}$$

Die 250 kommt daher, dass ein Jahr in etwa 250 Banking-Days oder Arbeitstage hat, also 365 minus Wochenenden und minus Feiertage. Es ist intuitiv klar, dass die Standardabweichungen der Asset-Returns von dem Δt abhängen. Nimmt man etwa wöchentliche oder sogar monatliche Returns, sind diese natürlich grösser und haben dann auch eine grössere Standardabweichung. Wieder durch eine reine Datenanalyse (das machen wir in der Excel/VBA-Vorlesung) kann man dann das folgende Skalierungs-Verhalten verifizieren:

$$\begin{aligned} \mu_{\mathrm{ret}} &\sim \Delta t \\ \sigma_{\mathrm{ret}} &\sim \sqrt{\Delta t} \end{aligned}$$

so dass man etwa schreiben kann

$$\mu_{\mathrm{ret}} \;=\; \mu\,\Delta t \tag{10}$$

$$\sigma_{\mathrm{ret}} \;=\; \sigma\,\sqrt{\Delta t} \tag{11}$$

mit neuen Konstanten μ und σ. Setzen wir (10,11) in (9) ein und Gleichung (9) dann in Gleichung (2), erhalten wir das zeitdiskrete Black-Scholes Modell, gegeben durch folgende Gleichung (12):

Definition 6.1: Eine Preisdynamik gegeben durch

$$S_{t_k} \;=\; S_{t_{k-1}} \left(1 \,+\, \mu\,\Delta t \,+\, \sigma\,\sqrt{\Delta t}\,\phi_k \right) \tag{12}$$

mit reellen Konstanten μ und σ und unabhängigen, standard-normalverteilten Zufallszahlen $\{\phi_k\}_{k=1}^N$ wird als das zeitdiskrete **Black-Scholes Modell** bezeichnet. Der Parameter μ heisst auch Drift-Parameter und das σ wird als Volatilität oder auch Diffusionsparameter bezeichnet.

In der restlichen Veranstaltung heute wollen wir jetzt noch das Skalierungverhalten (11), die Standardabweichungen sind proportional zu $\sqrt{\Delta t}$ und nicht zu Δt, mathematisch etwas plausibilisieren, also nicht durch eine Datenanalyse. Wir starten mit Gleichung (3) mit den Returns für das zeitdiskrete Black-Scholes Modell:

$$\begin{aligned}
S_{t_N} \;&=\; S_{t_0} \prod_{k=1}^N \left(1 \,+\, \mathrm{ret}_{t_k} \right) \\
&=\; S_{t_0} \prod_{k=1}^N \left(1 \,+\, \mu\,\Delta t \,+\, \sigma\,\sqrt{\Delta t}\,\phi_k \right) \\
&=\; S_{t_0}\, \exp\left\{ \log\left[\prod_{k=1}^N \left(1 \,+\, \mu\,\Delta t \,+\, \sigma\,\sqrt{\Delta t}\,\phi_k \right) \right] \right\} \\
&=\; S_{t_0}\, \exp\left\{ \sum_{k=1}^N \log\left[1 \,+\, \mu\,\Delta t \,+\, \sigma\,\sqrt{\Delta t}\,\phi_k \right] \right\}
\end{aligned} \tag{13}$$

Wir machen eine Taylor-Entwicklung 2. Ordnung für $f(x) := \log[1+x]$ mit $x := \mu\,\Delta t + \sigma\,\sqrt{\Delta t}\,\phi_k$. Mit der allgemeinen Formel

$$f(x) \;=\; f(0) \,+\, f'(0)\,x \,+\, \frac{1}{2}\,f''(0)\,x^2 \,+\, O(x^3)$$

bekommen wir dann

$$\begin{aligned}
\log[1+x] \;&=\; \log[1] \,+\, \frac{1}{1+0}\,x \,+\, \frac{1}{2}\,\frac{-1}{(1+0)^2}\,x^2 \,+\, O(x^3) \\
&=\; x \,-\, \frac{x^2}{2} \,+\, O(x^3)
\end{aligned}$$

Also, wenn wir Terme der Grössenordung $O(\Delta t^{3/2})$ ignorieren,

$$\begin{aligned}
\log\left[1 \,+\, \mu\,\Delta t \,+\, \sigma\,\sqrt{\Delta t}\,\phi_k \right] \;&\approx\; \mu\,\Delta t \,+\, \sigma\,\sqrt{\Delta t}\,\phi_k \,-\, \frac{(\mu\,\Delta t \,+\, \sigma\,\sqrt{\Delta t}\,\phi_k)^2}{2} \\
&\approx\; \mu\,\Delta t \,+\, \sigma\,\sqrt{\Delta t}\,\phi_k \,-\, \frac{\sigma^2}{2}\,\Delta t\,\phi_k^2
\end{aligned} \tag{14}$$

Die Approximation (14) setzen wir in (13) ein und bekommen die Darstellung

$$\begin{aligned}
S_{t_N} \;&\approx\; S_{t_0}\, \exp\left\{ \sum_{k=1}^N \left[\mu\,\Delta t \,+\, \sigma\,\sqrt{\Delta t}\,\phi_k \,-\, \frac{\sigma^2}{2}\,\Delta t\,\phi_k^2 \right] \right\} \\
&=\; S_{t_0}\, \exp\left\{ \mu\,N\Delta t \,+\, \sigma\,\sqrt{\Delta t}\,\textstyle\sum_{k=1}^N \phi_k \,-\, \frac{\sigma^2}{2}\,\Delta t\,\sum_{k=1}^N \phi_k^2 \right\}
\end{aligned} \tag{15}$$

Durch diese Darstellung wird nahegelegt, die folgenden Grössen einzuführen, etwa für beliebiges $k \in \{1, 2, \cdots, N\}$

$$x_{t_k} \;:=\; \sqrt{\Delta t}\,\sum_{j=1}^{k} \phi_j \tag{16}$$

$$I_{t_k} \;:=\; \Delta t\,\sum_{j=1}^{k} \phi_j^2 \tag{17}$$

Dann bekommen wir die folgenden Varianzen:

$$\mathsf{V}[\,x_{t_k}\,] \;=\; (\sqrt{\Delta t})^2 \sum_{j=1}^{k} \mathsf{V}[\,\phi_j\,] \;=\; \Delta t \sum_{j=1}^{k} 1 \;=\; k\Delta t \;=\; t_k \tag{18}$$

$$\mathsf{V}[\,I_{t_k}\,] \;=\; (\Delta t)^2 \sum_{j=1}^{k} \mathsf{V}[\,\phi_j^2] \;=\; (\Delta t)^2 \sum_{j=1}^{k} (3-1) \;=\; 2k(\Delta t)^2 \;=\; 2t_k\,\Delta t \;\to\; 0 \tag{19}$$

Und wegen $\mathsf{E}[\,I_{t_k}\,] = k\Delta t = t_k$ sieht die Darstellung (15) dann so aus:

$$\begin{aligned} S_{t_N} \;&=\; S_{t_0}\,\exp\Big\{\,\mu\,t_N \,+\, \sigma\,x_{t_N} \;-\; \frac{\sigma^2}{2}\,I_{t_N}\,\Big\} \\ &\overset{\Delta t \to 0}{\approx}\; S_{t_0}\,\exp\Big\{\,\mu\,t_N \,+\, \sigma\,x_{t_N} \;-\; \frac{\sigma^2 t_N}{2}\,\Big\} \end{aligned} \tag{20}$$

Wenn wir nun in Gleichung (11) geschrieben hätten $\sigma_{\mathrm{ret}} \;=\; \sigma\Delta t$ oder etwas allgemeiner

$$\sigma_{\mathrm{ret}} \;=\; \sigma\,\Delta t^{\alpha}$$

mit einem $\alpha > 1/2$, dann würde in Gleichung (18) die Varianz der x_{t_k} nach 0 konvergieren, so dass dann auch die Grössen x_{t_k} im Limes $\Delta t \to 0$ deterministisch werden würden, genauer, nach 0 konvergieren würden. Das heisst also, für kleine Δt würde der Preisprozess $\{S_{t_k}\}_{k=1}^{N}$ dann völlig deterministisch werden, da wäre nichts mehr stochastisch und das macht dann natürlich keinen Sinn mehr.

Definition 6.2: Es seien $\{\phi_k\}_{k=1}^{N}$ unabhängige, standard-normalverteilte Zufallszahlen. Dann heisst die Kombination von Zufallszahlen (16),

$$x_{t_k} \;:=\; \sqrt{\Delta t}\,\sum_{j=1}^{k} \phi_j$$

eine Brownsche Bewegung und der Preisprozess (20),

$$S_{t_k} \;:=\; S_{t_0}\,\exp\Big\{\,\mu\,t_k \,+\, \sigma\,x_{t_k} \;-\; \frac{\sigma^2 t_k}{2}\,\Big\}$$

wird auch als geometrische Brownsche Bewegung oder als das Black-Scholes Modell bezeichnet.