week6: Kapitel 5: Risikoneutrale Wahrscheinlichkeiten, Teil2

In der letzten Veranstaltung hatten wir für den Fall Zinsen $r = 0$ das folgende Theorem hergeleitet und wollen es jetzt noch für den allgemeinen Fall mit Zinsen $r \neq 0$ beweisen:

Theorem 5.1: Consider a price process $S_k = S(t_k)$ given by a Binomial model with returns $\mathrm{ret}_k \in \{\mathrm{ret}_{\mathrm{up}}, \mathrm{ret}_{\mathrm{down}}\}$. Let r be the interest rate paid per period and denote by

$$s_k \;=\; (1+r)^{-k}\, S_k \tag{1}$$

the discounted price process. Then the following statements hold:

a) Define the risk neutral probability

$$p_{\mathrm{rn}} \;=\; p_{\text{risk neutral}} \;:=\; \frac{r \,-\, \mathrm{ret}_{\mathrm{down}}}{\mathrm{ret}_{\mathrm{up}} \,-\, \mathrm{ret}_{\mathrm{down}}} \tag{2}$$

and denote expectations with respect to this probability by $\mathsf{E}_{\mathrm{rn}}[\,\cdot\,]$. Then the discounted price process $\{s_k\}_{k=0}^N$ is a martingale with respect to the risk neutral expectation. That is, the following equation holds for all $k = 0, 1, 2, ..., N-1$:

$$\mathsf{E}_{\mathrm{rn}}\big[\, s_{k+1} \,|\, \{s_j\}_{j=0}^k \,\big] \;=\; s_k \tag{3}$$

b) Let $H = H(S_0, S_1, ..., S_N)$ be the payoff of some option. Then the theoretical fair value of this option can be obtained from the following risk neutral expectation:

$$V_0 \;=\; (1+r)^{-N}\, \mathsf{E}_{\mathrm{rn}}\big[\, H(S_0, S_1, ..., S_N)\,\big] \tag{4}$$

Proof: The fact that option payoffs can be exactly replicated in the Binomial model reads in the presence of interest rates $r \neq 0$

$$h(S_0, S_1, ..., S_N) \;=\; v_0 \;+\; \sum_{k=1}^{N} \delta_{k-1}(S_0, ..., S_{k-1}) \times (s_k - s_{k-1}) \tag{5}$$

with $\;h = (1+r)^{-N} H =: R^{-N} H\;$ being the discounted payoff function. Thus, if we want to eliminate the sum on the right hand side of (5) by taking an expectation value, we need to have the following property:

$$\mathsf{E}\big[\, s_{k+1} \,|\, \{S_j\}_{j=0}^k \,\big] \;\stackrel{!}{=}\; s_k \tag{6}$$

or

$$R^{-(k+1)}\, \mathsf{E}\big[\, S_{k+1} \,|\, \{S_j\}_{j=0}^k \,\big] \;\stackrel{!}{=}\; R^{-k}\, S_k \tag{7}$$

which is equivalent to

$$
\begin{aligned}
& S_k \times \Big(1 + \mathrm{ret_{up}} \cdot p + \mathrm{ret_{down}} \cdot (1-p)\Big) && \stackrel{!}{=} && R\, S_k \\
\Leftrightarrow\quad & \mathrm{ret_{up}} \cdot p + \mathrm{ret_{down}} \cdot (1-p) && = && R - 1 \;=\; r \\
\Leftrightarrow\quad & (\mathrm{ret_{up}} - \mathrm{ret_{down}})p && = && r - \mathrm{ret_{down}}
\end{aligned}
$$

which gives

$$
p \;=\; \frac{r - \mathrm{ret_{down}}}{\mathrm{ret_{up}} - \mathrm{ret_{down}}} \;=:\; p_{\text{risk neutral}} \;=:\; p_{\mathrm{rn}}
$$

This proves part (a). Part (b) is obtained in the same way as in the $r = 0$ case: we can write

$$
\begin{aligned}
V_0 \;=\; v_0 \;&=\; \mathsf{E}_{\mathrm{rn}}[\,v_0\,] \;=\; \mathsf{E}_{\mathrm{rn}}[\,v_0 \,|\, S_0\,] \\
&\stackrel{(5)}{=}\; \mathsf{E}_{\mathrm{rn}}\Big[\, h(S_0, S_1, ..., S_N) \;-\; \sum_{k=1}^{N} \delta_{k-1}(S_0, ..., S_{k-1}) \times (s_k - s_{k-1}) \;\Big|\; S_0 \,\Big] \\
&=\; \mathsf{E}_{\mathrm{rn}}\big[\, h(S_0, S_1, ..., S_N)\,\big] \;-\; \sum_{k=1}^{N} \mathsf{E}_{\mathrm{rn}}\Big[\, \delta_{k-1}(S_0, ..., S_{k-1}) \times (s_k - s_{k-1}) \,\Big|\, S_0 \Big] \qquad (8)
\end{aligned}
$$

The expectations in the sum on the right hand side of (8) can be calculated as follows:

$$
\begin{aligned}
& \mathsf{E}_{\mathrm{rn}}\Big[\, \delta_{k-1}(S_0, ..., S_{k-1}) \times (s_k - s_{k-1}) \,\Big|\, S_0 \Big] \;= \\
&=\; \mathsf{E}_{\mathrm{rn}}\Big[\, \underbrace{\mathsf{E}_{\mathrm{rn}}\Big[\, \delta_{k-1}(S_0, ..., S_{k-1}) \times (s_k - s_{k-1}) \,\Big|\, \{S_j\}_{j=0}^{k-1} \Big]}_{\text{in this expectation all } \mathrm{S_1,...,S_{k-1}} \text{ are constant}} \;\Big|\; S_0 \,\Big] \\
&=\; \mathsf{E}_{\mathrm{rn}}\Big[\, \delta_{k-1}(S_0, ..., S_{k-1}) \times \mathsf{E}_{\mathrm{rn}}\Big[\, s_k - s_{k-1} \;\Big|\, \{S_j\}_{j=0}^{k-1} \Big] \;\Big|\; S_0 \,\Big] \\
&=\; \mathsf{E}_{\mathrm{rn}}\Big[\, \delta_{k-1}(S_0, ..., S_{k-1}) \times \Big(\mathsf{E}_{\mathrm{rn}}\Big[\, s_k \;\Big|\, \{S_j\}_{j=0}^{k-1} \Big] \;-\; s_{k-1} \Big) \;\Big|\; S_0 \,\Big] \qquad (9)
\end{aligned}
$$

Now we use the martingale property (6)

$$
\mathsf{E}_{\mathrm{rn}}\Big[\, s_k \;\Big|\, \{S_j\}_{j=0}^{k-1} \Big] \;-\; s_{k-1} \;=\; s_{k-1} \;-\; s_{k-1} \;=\; 0 \qquad (10)
$$

Thus also the expectation (9) vanishes and therefore the whole sum on the right hand side of (8) goes away if we take an expectation with respect to the risk neutral probability. Hence we end up with

$$
\begin{aligned}
V_0 \;=\; v_0 \;&=\; \mathsf{E}_{\mathrm{rn}}\big[\, h(S_0, S_1, ..., S_N)\,\big] \\
&=\; \mathsf{E}_{\mathrm{rn}}\big[\, R^{-N}\, H(S_0, S_1, ..., S_N)\,\big] \\
&=\; R^{-N}\, \mathsf{E}_{\mathrm{rn}}\big[\, H(S_0, S_1, ..., S_N)\,\big]
\end{aligned}
$$

and the theorem is proven. ■

Für eine pfadunabhängige Option mit Auszahlungsfunktion

$$H \;=\; H(S_N)$$

werden wir dann nächste Woche sehen, dass wir die Formel (4) in einen deutlich expliziteren Ausdruck umschreiben können, nämlich in

$$V_0 \;=\; (1+r)^{-N} \times \sum_{\ell=0}^{N} H(S_{N,\ell}) \times \binom{N}{\ell} \, p_{\mathrm{rn}}^{\ell} \, (1-p_{\mathrm{rn}})^{N-\ell}$$

wobei die $S_{N,\ell}$'s gegeben sind durch

$$S_{N,\ell} \;=\; S_0 \, (1 + \mathrm{ret_{up}})^{\ell} \, (1 + \mathrm{ret_{down}})^{N-\ell}$$

Heute haben wir noch etwas Zeit, um uns den Zusammenhang zwischen stetiger und diskreter Verzinsung klarzumachen, dazu betrachten wir die folgende

Aufgabe: Wir betrachten einen Zeithorizont von $T = 10$ Jahren und wir nehmen an, dass der jährliche Zinssatz bei $r = 5\%$ liegt. Ein Start-Kapital von 100 Euro soll verzinst werden. Wie gross ist das End-Kapital nach 10 Jahren bei

a) jährlicher

b) halbjährlicher

c) vierteljährlicher

d) monatlicher

e) stetiger

Verzinsung?

Lösung: Es sei also r der jährliche Zinssatz und $G = 100$ Euro ist das Startgeld. Bei jährlicher Verzinsung ergeben sich dann die folgenden Geldbeträge:

$$100 \quad \xrightarrow[]{\substack{\text{die Zeit vergeht}\\ \text{von 0 nach 1 Jahr}}} \quad 100\,(1+5\%)$$

$$100\,(1+5\%) \quad \xrightarrow[]{\substack{\text{die Zeit vergeht}\\ \text{von 1 Jahr nach 2 Jahren}}} \quad 100\,(1+5\%)\,(1+5\%) \;=\; 100\,(1+5\%)^2$$

$$100\,(1+5\%)^2 \quad \xrightarrow[]{\substack{\text{die Zeit vergeht}\\ \text{vom 2. Jahr zum 3. Jahr}}} \quad 100\,(1+5\%)^2\,(1+5\%) \;=\; 100\,(1+5\%)^3$$

$$\vdots$$

$$100\,(1+5\%)^9 \quad \xrightarrow[]{\substack{\text{die Zeit vergeht}\\ \text{vom 9. Jahr zum 10. Jahr}}} \quad 100\,(1+5\%)^9\,(1+5\%) \;=\; 100\,(1+5\%)^{10} \;\approx\; 162.89$$

Betrachten wir jetzt halbjährliche Verzinsung. Wenn man sagt, dass man einen jährlichen Zinssatz von 5% hat und man halbjährlich verzinsen möchte, dann meint das, dass man immer nach einem halben Jahr einen Zins von 2.5% anwendet. Also bekommt man folgende Geldbeträge:

$$\begin{aligned}
100 &\xrightarrow[\text{von 0 nach 0.5 Jahren}]{\text{die Zeit vergeht}} \quad 100\,(1+2.5\%) \\
100\,(1+2.5\%) &\xrightarrow[\text{von 0.5 Jahren nach 1 Jahr}]{\text{die Zeit vergeht}} \quad 100\,(1+2.5\%)\,(1+2.5\%) \;=\; 100\,(1+2.5\%)^2 \\
100\,(1+2.5\%)^2 &\xrightarrow[\text{von 1 Jahr nach 1.5 Jahren}]{\text{die Zeit vergeht}} \quad 100\,(1+2.5\%)^2\,(1+2.5\%) \;=\; 100\,(1+2.5\%)^3 \\
&\vdots \\
100\,(1+2.5\%)^{19} &\xrightarrow[\text{von 9.5 Jahren nach 10 Jahren}]{\text{die Zeit vergeht}} \quad 100\,(1+2.5\%)^{19}\,(1+2.5\%) \;=\; 100\,(1+2.5\%)^{20} \\
&\qquad\qquad \approx\; 163.86
\end{aligned}$$

Bei vierteljährlicher Verzinsung haben wir dann also 40 Zinsperioden, in denen dann jeweils der Zinssatz von

$$r/4 \;=\; 5\%/4 \;=\; 1.25\%$$

anzuwenden ist. Also bekommen wir den Betrag

$$100\,(1+1.25\%)^{40} \;\approx\; 164.36$$

Und bei monatlicher Verzinsung haben wir 12 Zinsperioden pro Jahr, 120 in 10 Jahren, in denen jeweils der Zinssatz von $r/12 = 5\%/12$ anzuwenden ist. Das liefert

$$100\left(1+\tfrac{5\%}{12}\right)^{10\times 12} \;\approx\; 164.70$$

Bei n Zinsperioden pro Jahr ergibt sich also nach T Jahren ein Endbetrag G_T gegeben durch

$$G_T \;=\; G_0\left(1+\tfrac{r}{n}\right)^{T\times n}$$

Stetige Verzinsung ist dann einfach der Limes $n\to\infty$ von der obigen Formel. Wir erinnern uns kurz an die Analysis I:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\tfrac{x}{n}\right)^n \;=\; e^x$$

Also bekommen wir im Falle von stetiger Verzinsung:

$$\begin{aligned}
G_T &= \lim_{n\to\infty} G_0\left(1+\tfrac{r}{n}\right)^{T\times n} \\
&= G_0\left\{\lim_{n\to\infty}\left(1+\tfrac{r}{n}\right)^n\right\}^T \\
&= G_0\, e^{rT}
\end{aligned}$$

In unserem konkreten Fall:

$$G_T \;=\; e^{0.05\times 10} \;=\; e^{0.5} \;\approx\; 164.87$$