

week4: Kapitel 4: Das N-Perioden Binomialmodell, Teil2

In der letzten Veranstaltung hatten wir das Binomialmodell als ein zeitdiskretes Assetpreismodell definiert, was von einem Zeitpunkt t_{k-1} zum nächsten Zeitpunkt t_k jeweils immer nur 2 Einstellungsmöglichkeiten zulässt, das war die folgende

Definition 4.2: If the price process $S_k = S(t_k)$ of some tradable asset S has the dynamics

$$S_k = S_{k-1}(1 + \text{ret}_k) \quad \text{with} \quad \text{ret}_k \in \{\text{ret}_{\text{up}}, \text{ret}_{\text{down}}\} \quad (1)$$

for all k , then we say that S is given by the Binomial model.

Dann hatten wir das folgende Theorem bewiesen:

Theorem 4.1: Let S be some tradable asset whose price process is given by the Binomial model (1). Let r be some interest rate per period such that cash amounts G change their values according to $G \xrightarrow{t_{k-1} \rightarrow t_k} G(1+r)$. Then every option payoff

$$H = H(S_0, \dots, S_N)$$

can be replicated. A replicating strategy is given by, for $k = 0, 1, \dots, N-1$:

$$\delta_k = \delta_k(S_0, \dots, S_k) = \frac{V_{k+1}^{\text{up}} - V_{k+1}^{\text{down}}}{S_{k+1}^{\text{up}} - S_{k+1}^{\text{down}}} \quad (2)$$

with the abbreviations

$$\begin{aligned} S_{k+1}^{\text{up/down}} &:= S_k (1 + \text{ret}_{\text{up/down}}) \\ V_{k+1}^{\text{up/down}} &:= V_{k+1}(S_0, \dots, S_k, S_{k+1}^{\text{up/down}}) \end{aligned}$$

and the portfolio values V_k , including the theoretical fair value, the option price V_0 , can be inductively calculated through the following formulae:

$$V_k = (1+r)^k v_k$$

with discounted portfolio values v_k given recursively by

$$v_k = w_{\text{up}} v_{k+1}^{\text{up}} + w_{\text{down}} v_{k+1}^{\text{down}} \quad (3)$$

and the recursion starts at $k = N$ with discounted portfolio values

$$v_N := (1 + r)^{-N} H(S_0, \dots, S_N)$$

The weights w_{up} and w_{down} are given by

$$w_{\text{up}} = \frac{r - \text{ret}_{\text{down}}}{\text{ret}_{\text{up}} - \text{ret}_{\text{down}}} \quad (4)$$

$$w_{\text{down}} = 1 - w_{\text{up}} = \frac{\text{ret}_{\text{up}} - r}{\text{ret}_{\text{up}} - \text{ret}_{\text{down}}} . \quad (5)$$

Remarks: 1) If H is a path-independent or non-exotic option which depends only on the underlying price at maturity,

$$H = H(S_N)$$

then the δ_k and the value of the replicating portfolio V_k at t_k depend only on the asset price S_k and do not depend on earlier prices $S_{k-1}, S_{k-2}, \dots, S_0$. That is,

$$\begin{aligned} V_k &= V_k(S_k) \\ \delta_k &= \delta_k(S_k) \end{aligned}$$

2) Assume zero interest rates $r = 0$ such that $R = 1 + r = 1$ and $v_k = V_k$. Then (3) becomes

$$V_k = w_{\text{up}} V_{k+1}^{\text{up}} + w_{\text{down}} V_{k+1}^{\text{down}}$$

with weights

$$\begin{aligned} w_{\text{up}} &= \frac{r - \text{ret}_{\text{down}}}{\text{ret}_{\text{up}} - \text{ret}_{\text{down}}} = \frac{-\text{ret}_{\text{down}}}{\text{ret}_{\text{up}} - \text{ret}_{\text{down}}} \\ w_{\text{down}} &= \frac{+\text{ret}_{\text{up}}}{\text{ret}_{\text{up}} - \text{ret}_{\text{down}}} \end{aligned}$$

If we further assume a ‘symmetric’ Binomial model with (say, $q = 1\%$ or $q = 5\%$)

$$\begin{aligned} \text{ret}_{\text{up}} &= +q \\ \text{ret}_{\text{down}} &= -q \end{aligned}$$

the weights simplify to

$$w_{\text{up}} = \frac{-(-q)}{2q} = \frac{1}{2} = w_{\text{down}}$$

and we arrive at the simple recursion formula

$$V_k = \frac{V_{k+1}^{\text{up}} + V_{k+1}^{\text{down}}}{2} . \quad (6)$$

Die Option, die wir in der Übung in der letzten Veranstaltung durchgerechnet hatten, das war eine Standard-Kauf-Option, ist eine pfadunabhängige Option, die Auszahlung H hängt nur vom Underlyingpreis S_N bei Maturity ab, $H = H(S_N)$. In dem nächsten Beispiel 2 betrachten wir eine pfadabhängige oder auch ‘exotische’ Option. Bei solchen Optionen tut die Auszahlung H nicht nur von dem Underlyingpreis bei Maturity S_N abhängen, sondern sie hängt von dem gesamten realisierten Preispfad ab, $H = H(S_0, S_1, \dots, S_N)$. In einem solchen Fall ist es nicht mehr ausreichend, einen rekombinierenden Binomialbaum mit $N + 1$ Endpunkten zu betrachten wie in dem letzten Beispiel, sondern wir müssen eine Baumstruktur mit 2^N Endpunkten betrachten. Schauen wir uns das an:

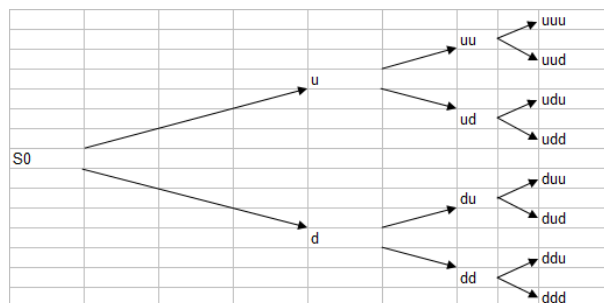
Beispiel 2: Wir betrachten wieder ein 3-Perioden Binomialmodell mit Preisprozess

$$S_k = S_{k-1} \times (1 + \text{ret}_k)$$

mit Returns gegeben durch $\text{ret}_k \in \{+10\%, -10\%\}$ für $k = 1, 2, 3$ und nehmen an, dass die Zinsen Null sind, $r = 0$. Es sei $S_0 = 100$. Wir betrachten eine All Time High Option mit Auszahlung

$$H(\{S_k\}) = \max_{k \in \{0, 1, 2, 3\}} S_k .$$

- a) Berechnen Sie den Preis V_0 dieser Option. Machen Sie sich dazu zunächst klar, dass es jetzt nicht mehr ausreichend ist, einen rekombinierenden Binomial-Baum mit 4 Endpunkten zu betrachten (wie in Beispiel 1), sondern Sie müssen folgende Baum-Struktur betrachten,



n -Perioden Binär-Baum mit 2^n Endpunkten, $n = 3$

Berechnen Sie dann wieder die V_k an allen Knotenpunkten mit Hilfe der Rekursionsformel aus dem Theorem 4.1.

- b) Berechnen Sie für jeden Knotenpunkt die δ 's, die Anzahl der Stücke vom Underlying, die man halten muss, damit man die Optionsauszahlung H replizieren kann.
- c) Betrachten Sie jetzt die folgenden 2 Preis-Pfade:

$$\text{Pfad}_1 := \{\text{up}, \text{up}, \text{up}\}$$

$$\text{Pfad}_2 := \{\text{up}, \text{down}, \text{down}\}$$

Zeigen Sie explizit für diese beiden Pfade, dass die replizierende Strategie definiert durch die δ 's aus Teil (b) tatsächlich die Optionsauszahlung H replizieren tut.