week10: Kapitel 7: Die Black-Scholes Formeln, Teil1

Wir wollen jetzt das zeitdiskrete Black-Scholes Modell

$$S_{t_k} \;=\; S_{t_{k-1}}\big(1 + \mu\,\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t}\,\phi_k\big) \tag{1}$$

durch ein Binomial-Modell approximieren. Das zeitdiskrete Black-Scholes Modell hat die Returns

$$\mathrm{ret}_{t_k} \;=\; \mu\,\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t}\,\phi_k \tag{2}$$

mit $\mathsf{E}[\phi_k] = 0$ und $\mathsf{V}[\phi_k] = 1$. Diese Returns wollen wir ersetzen durch Returns, die nur zwei Einstellungsmöglichkeiten $\mathrm{ret}_{\mathrm{up}}$ und $\mathrm{ret}_{\mathrm{down}}$ zulassen. Die folgende Wahl bietet sich an:

$$\begin{aligned} \mathrm{ret}_{\mathrm{up}} &:= \mu\,\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t} \\ \mathrm{ret}_{\mathrm{down}} &:= \mu\,\Delta t - \sigma\sqrt{\Delta t} \end{aligned}$$

oder etwas anders geschrieben

$$\mathrm{ret}_{t_k} \;=\; \mu\,\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t}\,\varepsilon_k \tag{3}$$

mit den Zufallszahlen

$$\varepsilon_k \;:=\; \begin{cases} +1 & \text{mit W'keit } 1/2 \\ -1 & \text{mit W'keit } 1/2 \end{cases} \tag{4}$$

Wir haben dann ebenfalls

$$\mathsf{E}[\,\varepsilon_k\,] \;=\; +1 \times \frac{1}{2} + (-1) \times \frac{1}{2} \;=\; 0$$

und

$$\begin{aligned} \mathsf{V}[\,\varepsilon_k\,] &= \mathsf{E}[\,\varepsilon_k^2\,] - \big(\mathsf{E}[\varepsilon_k]\big)^2 \;=\; \mathsf{E}[\,\varepsilon_k^2\,] \\ &= (+1)^2 \times \frac{1}{2} + (-1)^2 \times \frac{1}{2} \;=\; 1 \end{aligned}$$

Wir betrachten also das N-Perioden Binomialmodell mit Preisdynamik

$$S_{t_k} \;=\; S_{t_{k-1}}\big(1 + \mu\,\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t}\,\varepsilon_k\big) \tag{5}$$

Wenn sich ℓ up-Returns realisiert haben, ist der Preis S_{t_N} gegeben durch

$$S_{N,\ell} \;=\; S_0 \left(1 + \mu\,\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t}\right)^{\ell} \left(1 + \mu\,\Delta t - \sigma\sqrt{\Delta t}\right)^{N-\ell}$$

Erwartungswerte in diesem Binomialmodell sind dann gegeben durch

$$\begin{aligned}
\mathsf{E}\big[\,f(S_{t_N})\,\big] &= \mathsf{E}\Big[\,f\big(\,S_0 \prod_{j=1}^{N}(1 + \mathrm{ret}_j)\,\big)\,\Big] \\
&= \sum_{\ell=0}^{N} f(S_{N,\ell}) \,\times\, \mathsf{Prob}\big[\text{ es gibt } \ell \text{ up-returns }\big] \\
&= \sum_{\ell=0}^{N} f(S_{N,\ell}) \,\times\, \binom{N}{\ell} \,\times\, \Big(\frac{1}{2}\Big)^{\ell} \Big(1-\frac{1}{2}\Big)^{N-\ell} \\
&= \sum_{\ell=0}^{N} f(S_{N,\ell}) \,\times\, \frac{1}{2^N}\binom{N}{\ell} \;=:\; \mathsf{E}^{\mathrm{Bin}}\big[\,f(S_{t_N})\,\big]
\end{aligned} \tag{6}$$

während Erwartungswerte im zeitdiskreten Black-Scholes Modell gegeben sind durch

$$\begin{aligned}
\mathsf{E}\big[\,f(S_{t_N})\,\big] &= \mathsf{E}\Big[\,f\big(\,S_0 \prod_{j=1}^{N}(1 + \mathrm{ret}_j)\,\big)\,\Big] \\
&\overset{\Delta t\to 0}{=} \mathsf{E}\Big[\,f\Big(S_0\,\exp\big\{\,\sigma\,x_{t_N} + (\mu - \tfrac{\sigma^2}{2})t_N\,\big\}\Big)\Big] \\
&\overset{\text{Thm 6.3}}{=} \int_{\mathbb{R}} f\Big(S_0\,\exp\big\{\,\sigma x + (\mu - \tfrac{\sigma^2}{2})t_N\,\big\}\Big)\; e^{-\frac{x^2}{2t_N}}\;\frac{dx}{\sqrt{2\pi t_N}} \\
&= \int_{\mathbb{R}} f\Big(S_0\,\exp\big\{\,\sigma\sqrt{t_N}\,x + (\mu - \tfrac{\sigma^2}{2})t_N\,\big\}\Big)\; e^{-\frac{x^2}{2}}\;\frac{dx}{\sqrt{2\pi}} \\
&=: \mathsf{E}^{\mathrm{BS}}\big[\,f(S_{t_N})\,\big]
\end{aligned} \tag{7}$$

Es gilt nun das folgende

Theorem 7.1: Es sei $T = t_N = N\Delta t$ ein fester Zeithorizont. Wir betrachten den Grenzwert $\Delta t \to 0$, $N \to \infty$ mit $T = N\Delta t$ fest. Für eine beliebige Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei $\mathsf{E}^{\mathrm{BS}}[\,\cdot\,]$ der Erwartungswert im zeitdiskreten Black-Scholes Modell gegeben durch (7) und $\mathsf{E}^{\mathrm{Bin}}[\,\cdot\,]$ sei der Erwartungswert im approximierenden Binomialmodell gegeben durch (6). Dann gilt:

$$\lim_{\Delta t\to 0} \mathsf{E}^{\mathrm{Bin}}\big[\,f(S_T)\,\big] \;=\; \mathsf{E}^{\mathrm{BS}}\big[\,f(S_T)\,\big] \tag{8}$$

oder explizit

$$\lim_{\Delta t\to 0} \sum_{\ell=0}^{N} f(S_{N,\ell}) \,\times\, \frac{1}{2^N}\binom{N}{\ell} \;=\; \int_{\mathbb{R}} f\Big(S_0\,\exp\big\{\,\sigma\sqrt{T}\,x \,+\, (\mu - \tfrac{\sigma^2}{2})T\,\big\}\Big)\; e^{-\frac{x^2}{2}}\;\frac{dx}{\sqrt{2\pi}} \tag{9}$$

mit

$$S_{N,\ell} \;=\; S_0 \left(1 + \mu\,\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t}\right)^{\ell} \left(1 + \mu\,\Delta t - \sigma\sqrt{\Delta t}\right)^{N-\ell} \tag{10}$$

Beweis: Das approximierende Binomialmodell ist gegeben durch die Returns (11),

$$\mathrm{ret}_{t_k} \;=\; \mu\,\Delta t \,+\, \sigma\,\sqrt{\Delta t}\,\varepsilon_k$$

Wir machen zunächst einmal dieselben Umformungen wie auf den letzten beiden Seiten vom week8.pdf:

$$\begin{aligned}
S_{t_N} &= S_{t_0}\,\prod_{k=1}^{N}(\,1 \,+\, \mathrm{ret}_{t_k}\,) \\
&= S_{t_0}\,\prod_{k=1}^{N}\big(\,1 \,+\, \mu\,\Delta t \,+\, \sigma\,\sqrt{\Delta t}\,\varepsilon_k\,\big) \\
&= S_{t_0}\,\exp\Big\{\,\log\Big[\,\prod_{k=1}^{N}\big(\,1 \,+\, \mu\,\Delta t \,+\, \sigma\,\sqrt{\Delta t}\,\varepsilon_k\,\big)\,\Big]\,\Big\} \\
&= S_{t_0}\,\exp\Big\{\,\sum_{k=1}^{N}\log\big[\,1 \,+\, \mu\,\Delta t \,+\, \sigma\,\sqrt{\Delta t}\,\varepsilon_k\,\big]\,\Big\} \qquad (11)
\end{aligned}$$

Wir machen wieder eine Taylor-Entwicklung 2. Ordnung für $f(x) := \log[1+x]$ mit $x := \mu\,\Delta t \,+\, \sigma\,\sqrt{\Delta t}\,\varepsilon_k$. Mit der allgemeinen Formel

$$f(x) \;=\; f(0) \,+\, f'(0)\,x \,+\, \frac{1}{2}\,f''(0)\,x^2 \,+\, O(x^3)$$

bekommen wir

$$\log[1+x] \;=\; x \,-\, \frac{x^2}{2} \,+\, O(x^3)$$

Wir ignorieren wieder Terme der Grössenordung $O(\Delta t^{3/2})$,

$$\begin{aligned}
\log\big[\,1 \,+\, \mu\,\Delta t \,+\, \sigma\,\sqrt{\Delta t}\,\varepsilon_k\,\big] &\approx \mu\,\Delta t \,+\, \sigma\,\sqrt{\Delta t}\,\varepsilon_k \,-\, \frac{(\mu\,\Delta t \,+\, \sigma\,\sqrt{\Delta t}\,\varepsilon_k)^2}{2} \\
&\approx \mu\,\Delta t \,+\, \sigma\,\sqrt{\Delta t}\,\varepsilon_k \,-\, \frac{\sigma^2}{2}\,\Delta t\,\varepsilon_k^2
\end{aligned}$$

Hier haben wir jetzt $\varepsilon_k = \pm 1$ so dass $\varepsilon_k^2 = 1$. Also,

$$\log\big[\,1 \,+\, \mu\,\Delta t \,+\, \sigma\,\sqrt{\Delta t}\,\varepsilon_k\,\big] \;\approx\; \sigma\,\sqrt{\Delta t}\,\varepsilon_k \,+\, (\mu - \sigma^2/2)\,\Delta t \qquad (12)$$

Die Approximation (12) setzen wir in (11) ein und bekommen die Darstellung

$$S_{t_N} \;\approx\; S_{t_0}\,\exp\Big\{\,\sigma\,\sqrt{\Delta t}\,\textstyle\sum_{k=1}^{N}\varepsilon_k \,+\, (\mu - \sigma^2/2)\,N\Delta t\,\Big\} \qquad (13)$$

Soweit die Analogie zum week8.pdf. Jetzt berechnen wir den Erwartungswert im Binomialmodell. Wenn wir ℓ up-Returns haben mit $\varepsilon_k = +1$ sind $N-\ell$ Returns down-Returns mit $\varepsilon_k = -1$. Also ist dann

$$\textstyle\sum_{k=1}^{N}\varepsilon_k \;=\; +1\times\ell \,+\, (-1)\times(N-\ell) \;=\; 2\ell - N \qquad (14)$$

und wir bekommen

$$
\begin{aligned}
\mathsf{E}\big[\, f(S_{t_N})\,\big] \;&=\; \mathsf{E}\Big[\, f\big(\, S_0 \prod_{j=1}^{N}(1 \,+\, \mathrm{ret}_j)\,\big)\,\Big] \\
&\overset{(13)}{\approx} \;\mathsf{E}\Bigg[\, f\Big(\, S_0\, \exp\big\{\, \sigma\,\sqrt{\Delta t}\,\textstyle\sum_{k=1}^{N}\varepsilon_k \;+\; (\mu-\sigma^2/2)\,N\Delta t\,\big\}\,\Big)\,\Bigg] \\
&= \;\sum_{\ell=0}^{N} \mathsf{E}\Bigg[\, f\Big(\, S_0\, \exp\big\{\, \sigma\,\sqrt{\Delta t}\,\textstyle\sum_{k=1}^{N}\varepsilon_k \;+\; (\mu-\sigma^2/2)T\,\big\}\,\Big) \times \chi\big(\,\text{es gibt } \ell \text{ up-returns}\,\big)\,\Bigg] \\
&= \;\sum_{\ell=0}^{N} f\Big(\, S_0\, \exp\big\{\, \sigma\,\sqrt{\Delta t}(2\ell-N) \;+\; (\mu-\sigma^2/2)T\,\big\}\,\Big) \times \mathsf{Prob}\big[\,\text{es gibt } \ell \text{ up-returns}\,\big] \\
&= \;\sum_{\ell=0}^{N} f\Big(\, S_0\, \exp\big\{\, \sigma\,\sqrt{\Delta t}(2\ell-N) \;+\; (\mu-\sigma^2/2)T\,\big\}\,\Big) \times \binom{N}{\ell}\,\Big(\frac{1}{2}\Big)^{\ell}\,\Big(1-\frac{1}{2}\Big)^{N-\ell} \\
&= \;\sum_{\ell=0}^{N} f\Big(\, S_0\, \exp\big\{\, \sigma\,\sqrt{T/N}(2\ell-N) \;+\; (\mu-\sigma^2/2)T\,\big\}\,\Big) \times \frac{1}{2^N}\binom{N}{\ell} \qquad (15)
\end{aligned}
$$

Jetzt benutzen wir das Resultat aus der ersten Aufgabe vom Übungsblatt 9, das war die folgende Formel: Für ein beliebiges $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ gilt

$$
\lim_{N\to\infty}\sum_{\ell=0}^{N} F\big(\tfrac{2\ell-N}{\sqrt{N}}\big)\times\tfrac{1}{2^N}\tbinom{N}{\ell} \;=\; \int_{-\infty}^{\infty} F(x)\,e^{-\frac{x^2}{2}}\,\tfrac{dx}{\sqrt{2\pi}} \qquad (16)
$$

In unserem Fall ist das F offensichtlich gegeben durch

$$
F(x) \;:=\; f\Big(\, S_0\,\exp\big\{\,\sigma\,\sqrt{T}\,x \;+\; (\mu-\sigma^2/2)T\,\big\}\,\Big) \qquad (17)
$$

und wir erhalten

$$
\begin{aligned}
&\lim_{\Delta t\to 0}\mathsf{E}^{\mathrm{Bin}}\big[\, f(S_{t_N})\,\big] \\
&\quad\overset{(15)}{=} \;\lim_{N\to\infty}\sum_{\ell=0}^{N} f\Big(\, S_0\, \exp\big\{\, \sigma\,\sqrt{T/N}(2\ell-N) \;+\; (\mu-\sigma^2/2)T\,\big\}\,\Big) \times \frac{1}{2^N}\binom{N}{\ell} \\
&\quad\overset{(17)}{=} \;\lim_{N\to\infty}\sum_{\ell=0}^{N} F\Big(\frac{2\ell-N}{\sqrt{N}}\Big) \times \frac{1}{2^N}\binom{N}{\ell} \\
&\quad\overset{(16)}{=} \;\int_{-\infty}^{\infty} F(x)\,e^{-\frac{x^2}{2}}\,\tfrac{dx}{\sqrt{2\pi}} \\
&\quad\overset{(17)}{=} \;\int_{-\infty}^{\infty} f\Big(\, S_0\,\exp\big\{\,\sigma\,\sqrt{T}\,x \;+\; (\mu-\sigma^2/2)T\,\big\}\,\Big)\,e^{-\frac{x^2}{2}}\,\tfrac{dx}{\sqrt{2\pi}} \\
&\quad= \;\mathsf{E}^{\mathrm{BS}}\big[\, f(S_T)\,\big]
\end{aligned}
$$

Damit ist das Theorem bewiesen. ■

Nächste Woche schauen wir uns dann an, wie wir diese Resultate benutzen können, um den Preis einer Option im Black-Scholes Modell zu berechnen.