8. Übungsblatt zur Vorlesung
Einführung in die Finanzmathematik

1. Aufgabe: Das zeitdiskrete Black-Scholes Modell auf dem Intervall

$$[0,T] \quad \approx \quad \big\{0, \Delta t, 2\Delta t, \cdots, (N-1)\Delta t, N\Delta t = T\big\}$$

ist gegeben durch die Rekursion

$$S_{t_k} \quad = \quad S_{t_{k-1}} \left(1 + \mu\,\Delta t + \sigma\,\sqrt{\Delta t}\,\phi_k\right) \tag{1}$$

mit reellen Konstanten μ und σ und unabhängigen, standard-normalverteilten Zufallszahlen $\{\phi_k\}_{k=1}^N$. In der Vorlesung haben wir gezeigt, dass für kleine Δt die Rekursion (1) näherungsweise durch den folgenden Ausdruck gelöst wird,

$$S_{t_k} \quad = \quad S_{t_0}\,\exp\left\{\,\mu\,t_k + \sigma\,x_{t_k} - \frac{\sigma^2 t_k}{2}\,\right\} \tag{2}$$

Dabei ist

$$x_{t_k} \quad := \quad \sqrt{\Delta t}\,\sum_{j=1}^{k} \phi_j \tag{3}$$

eine Brownsche Bewegung in diskreter Zeit. Führen Sie folgende Berechnungen durch mit Hilfe von Excel/VBA:

a) Simulieren und plotten Sie einige Pfade der Brownschen Bewegung gegeben durch (3).

b) Simulieren und plotten Sie die Pfade für das zeitdiskrete Black-Scholes Modell gegeben durch (1), etwa für $S_0 = 100$, $\mu = 4\%$, $\sigma = 20\%$ und $T = 10$.

c) Simulieren und plotten Sie die Pfade für die geometrische Brownsche Bewegung gegeben durch (2) und zeigen Sie, dass sie für kleine Δt mit den Pfaden aus (1) übereinstimmen.

2. Aufgabe: Zur Simulation von Black-Scholes Pfaden oder Brownschen Bewegungen in Excel/VBA benötigen Sie standard-normalverteilte Zufallszahlen. Die folgende Approximation ist da recht nützlich:

```
Function ApproxNormalRnd() As Double

ApproxNormalRnd = Rnd() + Rnd() + Rnd() + Rnd() + _
                  Rnd() + Rnd() + Rnd() + Rnd() + _
                  Rnd() + Rnd() + Rnd() + Rnd() - 6

End Function
```

Erzeugen Sie etwa $N = 10000$ Zufallszahlen mit dieser Funktion, erstellen Sie ein Histogramm, wählen Sie die Skalierung so, dass die Fläche unter dem Histogramm gleich 1 ist, und plotten Sie ebenfalls die Dichte der Standard-Normalverteilung in dasselbe Histogramm. Die Dichte und das Histogramm sollten dann also in etwa übereinstimmen.

Bemerkung: Die Zahlen aus `ApproxNormalRnd` liegen alle im Intervall $[-6, 6]$. Wenn Sie also etwa zum Beispiel das Integral $\int_{\mathbb{R}} e^{7x}\, e^{-x^2/2}\, dx$ mit Monte Carlo mit standard-normalverteilten Zufallszahlen berechnen wollten (ok, das sollte man sowieso nicht machen, warum nicht?), dann ist diese Approximation nicht geeignet.

Dieses Übungsblatt wird in der nächsten Veranstaltung vorgerechnet.