

6. Übungsblatt zur Vorlesung Einführung in die Finanzmathematik

1. Aufgabe: Wir betrachten ein 2-Perioden Binomialmodell und zwei Optionen H_a und H_b mit folgenden Spezifikationen:

Underlying		Option Payoffs	
		Ha	Hb
S			
	121	20	0
	110		
100	99	10	10
	90		
	81	0	20

Wir wollen die Preise und die replizierenden Strategien für diese Optionen berechnen für den Fall Zinsen $r = 0\%$ und den Fall Zinsen $r = 5\%$. Dabei sei $r = 5\%$ der Zinssatz pro Periode und wir nehmen diskrete Verzinsung an, ein Geldbetrag G soll also seinen Wert von Periode zu Periode gemäss $G \rightarrow (1 + 5\%) \times G$ ändern.

- a) Die Zinsen seien Null, $r = 0\%$. Zeichnen Sie zwei Binomialbäume, für jede Option einen, und tragen Sie dann an den Knotenpunkten die Werte des replizierenden Portfolios $V_{k,\ell}$ und die delta's $\delta_{k,\ell}$ ein. Dabei sei $k \in \{0, 1, 2\}$ wie üblich der Zeit- oder Perioden-Index und $\ell \in \{0, 1, 2\}$ bezeichne die Anzahl der up-moves.
- b) Es seien $V_{k,\ell}^a, V_{k,\ell}^b$ und $\delta_{k,\ell}^a, \delta_{k,\ell}^b$ die Werte aus Aufgabenteil (a), also für den Fall Zinsen $r = 0\%$. Zeigen Sie: Für alle $k, \ell \in \{0, 1, 2\}$ gilt

$$\begin{aligned} V_{k,\ell}^a + V_{k,\ell}^b &= 20 \\ \delta_{k,\ell}^a + \delta_{k,\ell}^b &= 0 \end{aligned}$$

Versuchen Sie, nicht einfach nur die blossen numerischen Werte zu berechnen, sondern überlegen Sie sich, was der eigentliche Grund dafür ist.

- c) Die Zinsen seien jetzt ungleich Null, $r = 5\%$. Zeichnen Sie wieder zwei Binomialbäume, für jede Option einen, und tragen Sie dann an den Knotenpunkten die Werte der kleinen $v_{k,\ell}$'s, die diskontierten Portfoliowerte, und die delta's $\delta_{k,\ell}$ ein. Berechnen Sie dann die Werte der grossen $V_{k,\ell}$'s.
- d) Es seien $v_{k,\ell}^a, v_{k,\ell}^b$ und $\delta_{k,\ell}^a, \delta_{k,\ell}^b$ die Werte aus Aufgabenteil (c), also für den Fall Zinsen $r = 5\%$. Zeigen Sie: Für alle $k, \ell \in \{0, 1, 2\}$ gilt

$$\begin{aligned} v_{k,\ell}^a + v_{k,\ell}^b &= (1 + 5\%)^{-2} \times 20 \\ \delta_{k,\ell}^a + \delta_{k,\ell}^b &= 0 \end{aligned}$$

- e) Die Option H_a wird deutlich teurer und die Option H_b wird deutlich billiger im Fall mit positiven Zinsen, warum ist das so?
- f) Wir wollen noch checken, dass im Fall mit Zinsen die replizierende Strategie tatsächlich die Optionsauszahlung replizieren tut. Machen Sie das für beide Optionen H_a und H_b für den Preispfad, sagen wir, $\{\text{up,down}\}$.

2. Aufgabe: Wir betrachten einen Zeithorizont von $T = 5$ Jahren und wir nehmen an, dass der jährliche Zinssatz bei (unrealistischen) $r = 10\%$ liegt. Ein Start-Kapital von 1000 Euro soll verzinst werden. Wie gross ist das End-Kapital nach 5 Jahren bei

- a) jährlicher
- b) halbjährlicher
- c) vierteljährlicher
- d) stetiger

Verzinsung?