

4. Übungsblatt zur Vorlesung Einführung in die Finanzmathematik

1. Aufgabe: Wir betrachten ein 3-Perioden Binomialmodell mit Preisprozess

$$S_k = S_{k-1} \times (1 + \text{ret}_k)$$

mit Returns gegeben durch

$$\begin{aligned} \text{ret}_{\text{up}} &= +20\% \\ \text{ret}_{\text{down}} &= -20\% \end{aligned}$$

für $k = 0, 1, 2, 3$ und nehmen an, dass die Zinsen Null sind, $r = 0$. Es sei $S_0 = 100$. Wir betrachten eine Standard-Kauf-Option oder auch Call-Option mit Auszahlung oder Payoff

$$H(S_3) = \max\{S_3 - 90, 0\} .$$

- Berechnen Sie den Preis V_0 dieser Option mit Hilfe der Rekursionsformel aus dem Theorem 4.1.
- Berechnen Sie für jeden Knotenpunkt die δ 's, die Anzahl der Stücke vom Underlying, die man halten muss, damit man die Optionsauszahlung H replizieren kann.
- Zeigen Sie explizit für den Preispfad {up, up, down}, dass die replizierende Strategie definiert durch die δ 's aus Teil (b) tatsächlich die Optionsauszahlung H replizieren tut.

2. Aufgabe: Wir betrachten ein 3-Perioden Binomialmodell mit Preisprozess

$$S_k = S_{k-1} \times (1 + \text{ret}_k)$$

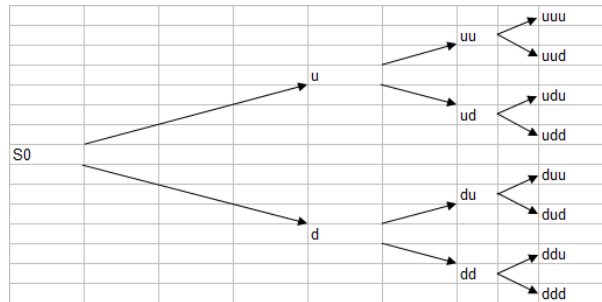
mit Returns gegeben durch

$$\begin{aligned} \text{ret}_{\text{up}} &= +20\% \\ \text{ret}_{\text{down}} &= -20\% \end{aligned}$$

für $k = 0, 1, 2, 3$ und nehmen an, dass die Zinsen Null sind, $r = 0$. Es sei $S_0 = 100$. Wir betrachten einen Lookback-Put mit Auszahlung

$$H(\{S_k\}) = S_0 - \min_{k \in \{0,1,2,3\}} S_k .$$

- a) Berechnen Sie den Preis V_0 dieser Option. Betrachten Sie dazu die folgende Baumstruktur:



n -Perioden Binär-Baum mit 2^n Endpunkten, $n = 3$

Berechnen Sie dann die V_k an allen Knotenpunkten mit Hilfe der Rekursionsformel aus dem Theorem 4.1.

- b) Berechnen Sie für jeden Knotenpunkt die δ 's, die Anzahl der Stücke vom Underlying, die man halten muss, damit man die Optionsauszahlung H replizieren kann.
- c) Betrachten Sie jetzt die folgenden 2 Preis-Pfade:

$$\text{Pfad}_1 := \{\text{up, down, down}\}$$

$$\text{Pfad}_2 := \{\text{down, down, up}\}$$

Zeigen Sie explizit für diese beiden Pfade, dass die replizierende Strategie definiert durch die δ 's aus Teil (b) tatsächlich die Optionsauszahlung H replizieren tut.