Hochschule RheinMain
Prof. Dr. D. Lehmann SS 2022

11. Übungsblatt zur Vorlesung
Einführung in die Finanzmathematik

1.Aufgabe: Wir betrachten eine Binär- oder Digital-Option mit Auszahlung

$$H(S_T) \quad := \quad \begin{cases} 1 & \text{falls } S_T \geq K \\ 0 & \text{falls } S_T < K \end{cases}$$

und nehmen an, dass die Preisdynamik des Underlyings $\{S_{t_k}\}$ durch ein das Black-Scholes Modell approximierendes Binomialmodell mit Returns

$$\begin{aligned} \mathrm{ret}_{\mathrm{up}} &:= \mu\,\Delta t \;+\; \sigma\sqrt{\Delta t} \\ \mathrm{ret}_{\mathrm{down}} &:= \mu\,\Delta t \;-\; \sigma\sqrt{\Delta t} \end{aligned}$$

gegeben ist. Zeigen Sie mit Hilfe des Theorems 7.2 aus der Vorlesung: Der Black-Scholes Preis V_0^{BS} von H ist gegeben durch

$$V_0^{\mathrm{BS}} \quad = \quad e^{-rT}\,N(d_-)$$

Dabei ist (das d_+ werden wir erst nächste Woche in den Black-Scholes Formeln benutzen, kommt in dieser Aufgabe noch nicht vor)

$$d_\pm \quad := \quad \frac{\log\frac{S_0}{K} + (r \pm \frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}}$$

und die Funktion N ist die kummulierte Verteilungsfunktion der Standard-Normalverteilung, gegeben durch

$$N(x) \quad := \quad \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{y^2}{2}}\,\frac{dy}{\sqrt{2\pi}}\;.$$

2. Aufgabe: Wir betrachten noch einmal dieselbe Situation wie in der Aufgabe 1 vom Übungsblatt 7: Gegeben sei ein N-Perioden Binomialmodell mit Preisprozess

$$S_k \quad = \quad S_{k-1} \times (1 + \mathrm{ret}_k)$$

mit $\mathrm{ret}_k \in \{\mathrm{ret}_{\mathrm{up}}, \mathrm{ret}_{\mathrm{down}}\}$ für $k = 1, 2, \cdots, N$. Gegeben sei weiter die europäische, pfadunabhängige Option H mit Payoff

$$H(S_N) \quad := \quad \frac{S_0}{S_N} \tag{1}$$

Auf dem Übungsblatt 7 haben Sie gezeigt: Der Preis V_0 von H lässt sich schreiben als

$$V_0 \;=\; (1+r)^{-N}\left\{\frac{p_{\mathrm{rn}}}{1+\mathrm{ret}_{\mathrm{up}}} \;+\; \frac{1-p_{\mathrm{rn}}}{1+\mathrm{ret}_{\mathrm{down}}}\right\}^N .$$

Wir wollen jetzt mit dem N-Perioden Binomialmodell ein Black-Scholes Modell auf dem Intervall $[0,T]$ approximieren. Das heisst, wir wählen die folgenden Werte für die up- und down-Returns:

$$\begin{aligned} \mathrm{ret}_{\mathrm{up}} &:= \mu\,\Delta t \;+\; \sigma\sqrt{\Delta t} \\ \mathrm{ret}_{\mathrm{down}} &:= \mu\,\Delta t \;-\; \sigma\sqrt{\Delta t} \end{aligned}$$

und betrachten den Limes $\Delta t \to 0$ mit $T = t_N = N\Delta t$ fest. Der Zinssatz pro Periode ist jetzt $r\Delta t$ wenn r etwa ein jährlicher Zins ist und die risikoneutrale W'keit ist

$$p_{\mathrm{rn}} \;=\; \frac{1+\frac{r-\mu}{\sigma}\sqrt{\Delta t}}{2} \;=:\; \frac{1+\alpha\sqrt{\Delta t}}{2}$$

Zeigen Sie:

a) Es gilt

$$V_0 \;=\; (1+r\Delta t)^{-\frac{T}{\Delta t}}\left\{\frac{1+(2\mu-r)\Delta t}{1+(2\mu-\sigma^2)\Delta t+\mu^2\Delta t^2}\right\}^{\frac{T}{\Delta t}} \;=:\; V_0^{\mathrm{Bin}}$$

b) Folgern Sie aus (a):

$$\lim_{\Delta t\to 0} V_0^{\mathrm{Bin}} \;=\; e^{(\sigma^2-2r)T}$$

Beachten Sie wieder, dass im Limes der Preis nicht von dem Driftparameter μ abhängt.

c) Verifizieren Sie jetzt die Formel aus dem Theorem 7.2 aus der Vorlesung für diesen Spezialfall. Das heisst, zeigen Sie, dass die Gleichung

$$V_0^{\mathrm{BS}} \;:=\; e^{-rT}\int_{\mathbb{R}} H\big(S_0 e^{\sigma\sqrt{T}\,x+(r-\sigma^2/2)T}\big)\, e^{-\frac{x^2}{2}}\,\frac{dx}{\sqrt{2\pi}} \;=\; e^{(\sigma^2-2r)T}$$

erfüllt ist für den Option-Payoff H aus Gleichung (1).