Hochschule RheinMain
Prof. Dr. D. Lehmann SS 2022

10. Übungsblatt zur Vorlesung
Einführung in die Finanzmathematik

1.Aufgabe: Es seien $\{\varepsilon_k\}_{k=1}^N$ eine Folge von unabhängigen und identisch verteilten Zufallszahlen mit einer diskreten oder stetigen Verteilung. Das heisst, die ε_k können zum Beispiel auf einem Intervall gleichverteilte Zufallszahlen sein oder auch diskrete Zufallszahlen etwa nur mit Werten in $\{+1, -1\}$. Wir nehmen an, dass

$$\begin{aligned} \mathsf{E}[\,\varepsilon_k\,] &= 0 \\ \mathsf{V}[\,\varepsilon_k\,] &= 1 \end{aligned}$$

Wir definieren einen Preisprozess $\{S_{t_k}\}_{k=0}^N$ in diskreter Zeit $t_k = k\Delta t$ durch die stochastische Rekursion

$$S_{t_k} \;=\; S_{t_{k-1}} \left(1 + \mu\,\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t}\,\varepsilon_k\right) \tag{1}$$

und betrachten den Limes $\Delta t \to 0$, $N \to \infty$ mit $T = N\Delta t$ fest. Zeigen Sie: Für eine beliebige Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gilt:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \mathsf{E}\big[\,f(S_{t_N})\,\big] \;=\; \int_{\mathbb{R}} f\Big(S_0 \exp\big\{\,\sigma\sqrt{T}\,x + (\mu - \tfrac{\sigma^2}{2})T\,\big\}\Big)\, e^{-\frac{x^2}{2}}\,\tfrac{dx}{\sqrt{2\pi}} \tag{2}$$

Gehen Sie dazu folgendermassen vor:

a) Lesen Sie sich noch einmal die dritte Seite vom week8.pdf durch und zeigen Sie durch eine völlig analoge Rechnung

$$S_{t_N} \;\approx\; S_0 \exp\Big\{\,\mu\,N\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t}\,\textstyle\sum_{k=1}^N \varepsilon_k \,-\, \frac{\sigma^2}{2}\,\Delta t \sum_{k=1}^N \varepsilon_k^2\,\Big\} \tag{3}$$

Dabei haben wir im Exponenten Terme der Gössenordnung $NO(\Delta t^{3/2}) = O(\Delta t^{1/2})$ vernachlässigt.

b) Definieren Sie, wie auf der vierten Seite von week8.pdf, die Grösse

$$I_{t_N} \;:=\; \Delta t \sum_{k=1}^N \varepsilon_k^2$$

und zeigen Sie

$$\begin{aligned} \mathsf{E}[\,I_{t_N}\,] &= t_N \\ \mathsf{V}[\,I_{t_N}\,] &= t_N\,\Delta t\,\mathsf{V}[\,\varepsilon^2\,] \end{aligned}$$

Wir nehmen an, dass $\mathsf{V}[\,\varepsilon^2\,] := \mathsf{V}[\,\varepsilon_1^2\,] < \infty$ so dass also $\mathsf{V}[\,I_{t_N}\,] \to 0$ und damit $I_{t_N} \to \mathsf{E}[\,I_{t_N}\,] = t_N$ im Limes $\Delta t \to 0$.

c) Definieren Sie die Grösse

$$z_N \quad := \quad \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=1}^{N} \varepsilon_k \tag{4}$$

und folgern Sie mit Hilfe von (a) und (b) und $t_N = N\Delta t = T$

$$S_{t_N} \quad \approx \quad S_0 \, \exp\Big\{ \, \sigma \sqrt{T} \, z_N \; + \; (\mu - \sigma^2/2) T \, \Big\} \tag{5}$$

d) Erinnern Sie sich jetzt an den zentralen Grenzwertsatz aus der Stochastik II Vorlesung, das finden Sie etwa in dem Theorem 2.2.4 im `http://hsrm-mathematik.de/SS2021/semester4/Stochastik2/week3b.pdf` . Folgern Sie dann mit festem $T = t_N = N\Delta t$

$$\lim_{N\to\infty} \mathsf{E}\big[\, f(S_{t_N}) \, \big] \quad = \quad \int_{\mathbb{R}} f\Big(S_0 \, \exp\{ \, \sigma\sqrt{T} z + (\mu - \tfrac{\sigma^2}{2}) T \, \} \Big) \; e^{-\frac{z^2}{2}} \; \frac{dz}{\sqrt{2\pi}} \quad .$$

Bemerkungen:

(i) In der Vorlesung hatten wir den zentralen Grenzwertsatz nicht benutzt, sondern wir hatten für den Spezialfall

$$\varepsilon_k \quad := \quad \begin{cases} +1 & \text{mit W'keit } 1/2 \\ -1 & \text{mit W'keit } 1/2 \end{cases}$$

die analoge Aussage, also

$$\lim_{N\to\infty} \mathsf{E}\big[\, f(z_N) \, \big] \quad = \quad \lim_{N\to\infty} \sum_{\ell=0}^{N} f\big(\tfrac{2\ell - N}{\sqrt{N}} \big) \times \tfrac{1}{2^N} \tbinom{N}{\ell} \quad = \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \, e^{-\frac{x^2}{2}} \, \frac{dx}{\sqrt{2\pi}}$$

auf dem 9. Übungsblatt separat bewiesen.

(ii) Dieses Übungsblatt ist natürlich nicht klausurrelevant, sondern soll Ihnen nur ein bisschen das 'bigger picture' vermitteln.