Hochschule RheinMain SS 2022
Prof. Dr. D. Lehmann

Lösungen zum 10. Übungsblatt
Einführung in die Finanzmathematik

1.Aufgabe: a) Wir haben wie im week8.pdf

$$\begin{aligned} S_{t_N} &= S_{t_0} \prod_{k=1}^{N} (\,1 + \mathrm{ret}_{t_k}\,) \\ &= S_{t_0} \prod_{k=1}^{N} \bigl(\,1 + \mu\,\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t}\,\varepsilon_k\,\bigr) \\ &= S_{t_0}\, \exp\Bigl\{\,\log\Bigl[\,\prod_{k=1}^{N} \bigl(\,1 + \mu\,\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t}\,\varepsilon_k\,\bigr)\,\Bigr]\,\Bigr\} \\ &= S_{t_0}\, \exp\Bigl\{\,\sum_{k=1}^{N} \log\bigl[\,1 + \mu\,\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t}\,\varepsilon_k\,\bigr]\,\Bigr\} \end{aligned} \tag{1}$$

Wir machen eine Taylor-Entwicklung 2. Ordnung für $f(x) := \log[1+x]$ mit $x := \mu\,\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t}\,\varepsilon_k$. Mit der allgemeinen Formel

$$f(x) = f(0) + f'(0)\,x + \frac{1}{2} f''(0)\,x^2 + O(x^3)$$

bekommen wir

$$\log[1+x] = x - \frac{x^2}{2} + O(x^3)$$

Wir ignorieren Terme der Grössenordung $O(\Delta t^{3/2})$ und bekommen

$$\begin{aligned} \log\bigl[\,1 + \mu\,\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t}\,\varepsilon_k\,\bigr] &\approx \mu\,\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t}\,\varepsilon_k - \frac{(\mu\,\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t}\,\varepsilon_k)^2}{2} \\ &\approx \mu\,\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t}\,\varepsilon_k - \frac{\sigma^2}{2}\,\Delta t\,\varepsilon_k^2 \end{aligned}$$

Wir setzen das im Exponenten von (1) ein und erhalten

$$S_{t_N} \approx S_0\, \exp\Bigl\{\,\mu\, N\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t}\,\textstyle\sum_{k=1}^{N} \varepsilon_k - \frac{\sigma^2}{2}\,\Delta t \sum_{k=1}^{N} \varepsilon_k^2\,\Bigr\} \tag{2}$$

b) Mit der Abkürzung

$$I_{t_N} := \Delta t \sum_{k=1}^{N} \varepsilon_k^2$$

haben wir

$$\mathsf{E}[\,I_{t_N}\,] \;=\; \Delta t \sum_{k=1}^{N} \mathsf{E}[\varepsilon_k^2] \;=\; \Delta t \sum_{k=1}^{N} 1 \;=\; \Delta t \times N \;=\; t_N$$

und

$$\mathsf{V}[\,I_{t_N}\,] \;=\; (\Delta t)^2 \sum_{k=1}^{N} \mathsf{V}[\varepsilon_k^2] \;=\; (\Delta t)^2 \sum_{k=1}^{N} \mathsf{V}[\,\varepsilon^2\,] \;=\; (\Delta t)^2\, \mathsf{V}[\,\varepsilon^2\,]\, N \;=\; t_N\, \Delta t\, \mathsf{V}[\,\varepsilon^2\,]$$

Also haben wir $\mathsf{V}[\,I_{t_N}\,] \to 0$ und damit $I_{t_N} \to \mathsf{E}[\,I_{t_N}\,] = t_N$ im Limes $\Delta t \to 0$.

c) Mit der Formel (2) und dem Teil (b) und der Definition von z_N bekommen wir sofort mit $T = t_N = N\Delta t$

$$\begin{aligned}
S_{t_N} &\approx S_0 \exp\Big\{\, \mu\, N\Delta t \,+\, \sigma \sqrt{\Delta t} \textstyle\sum_{k=1}^N \varepsilon_k \,-\, \frac{\sigma^2}{2}\, \Delta t \sum_{k=1}^N \varepsilon_k^2 \,\Big\} \\
&= S_0 \exp\Big\{\, \mu\, N\Delta t \,+\, \sigma \sqrt{\Delta t} \textstyle\sum_{k=1}^N \varepsilon_k \,-\, \frac{\sigma^2}{2}\, I_{t_N} \,\Big\} \\
&\approx S_0 \exp\Big\{\, \mu\, N\Delta t \,+\, \sigma \sqrt{\Delta t} \textstyle\sum_{k=1}^N \varepsilon_k \,-\, \frac{\sigma^2}{2}\, t_N \,\Big\} \\
&= S_0 \exp\Big\{\, \mu\, N\Delta t \,+\, \sigma \sqrt{N\Delta t} \textstyle\frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=1}^N \varepsilon_k \,-\, \frac{\sigma^2}{2}\, t_N \,\Big\} \\
&= S_0 \exp\Big\{\, \sigma \sqrt{T}\, z_N \,+\, (\mu - \sigma^2/2) T \,\Big\}
\end{aligned} \tag{3}$$

d) Und mit dem zentralen Grenzwertsatz folgt dann ebenfalls sofort aus (3)

$$\begin{aligned}
\mathsf{E}\big[\, f(S_{t_N})\,\big] &\approx \mathsf{E}\Big[\, f\Big(\, S_0 \exp\Big\{\, \sigma \sqrt{T}\, z_N \,+\, (\mu - \sigma^2/2) T \,\Big\} \,\Big) \Big] \\
&\approx \int_{\mathbb{R}} f\Big(S_0 \exp\{\, \sigma\sqrt{T}\, z + (\mu - \tfrac{\sigma^2}{2}) T \,\} \Big)\, e^{-\frac{z^2}{2}}\, \tfrac{dz}{\sqrt{2\pi}} \\
&= \int_{\mathbb{R}} f\Big(S_0 \exp\{\, \sigma x + (\mu - \tfrac{\sigma^2}{2}) T \,\} \Big)\, e^{-\frac{x^2}{2T}}\, \tfrac{dx}{\sqrt{2\pi T}}
\end{aligned} \tag{4}$$

Damit ist alles gezeigt.