

Lösungen zum 1. Übungsblatt Einführung in die Finanzmathematik

Aufgabe 1) Man findet $V_0 = 2,50$ wie bei der Standard-Kauf-Option und $\delta = -0,5$, die Bank muss zur Replikation des Option-Payoffs bei Zeit 0 eine halbe Aktie verkaufen. Die entsprechende slide aus den week1.pdf sieht dann so aus:

Die Grundidee der Optionspreisbewertung

- Als Optionspreis muss sie 2,50 Euro verlangen.
- Dann muss die Bank bei $t = 0$ **eine halbe Aktie verkaufen**.
- Bei Faelligkeit der Option bei $t = T = 1$ Woche muss die Bank diese halbe Aktie dann wieder zurueckkaufen:

$$\begin{aligned} \text{BankPortfolio_heute} &= 2,50 = 2,50 + 50 - 50 \\ &= +52,50(\text{cash}) - \text{halbe Aktie} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{BankPortfolio_1Woche} &= +52,50(\text{cash}) - \frac{105}{2} = +52,50 - 52,50 = 0 \text{ Euro} \\ &= +52,50(\text{cash}) - \frac{95}{2} = +52,50 - 47,50 = 5 \text{ Euro} \end{aligned}$$

Also:

$$\text{BankPortfolio_1Woche} = \text{option_payoff}$$

Aufgabe 2) Wir haben ein Startgeld V_0 . Zum Zeitpunkt $t = 0$ kaufen wir δ Stücke vom Underlying, dafür müssen wir (die Bank) δS_0 bezahlen. Das Bank-Portfolio zum Zeitpunkt $t = 0$ sieht also so aus:

$$V_0 = \underbrace{V_0 - \delta S_0}_{\text{cash}} + \underbrace{\delta S_0}_{\text{Aktie}}$$

Die Zeit vergeht von $t = 0$ nach $t = T$. Die Cash-Position bleibt gleich (wir nehmen an, dass die Zinsen 0 sind, $r = 0$). Die Aktien-Position verändert ihren Wert von δS_0 zu δS_T mit $S_T \in \{S_{\text{up}}, S_{\text{down}}\}$. Also, der Wert des Bank-Portfolios zur Zeit $t = T$ beträgt

$$V_T = \underbrace{V_0 - \delta S_0}_{\text{cash}} + \underbrace{\delta S_T}_{\text{Aktie}} \stackrel{!}{=} H(S_T)$$

Dabei ist $H(S_T) \in \{H_{\text{up}}, H_{\text{down}}\}$ die Optionsauszahlung. Also erhalten wir die beiden Gleichungen

$$\begin{aligned} V_0 - \delta S_0 + \delta S_{\text{up}} &= H_{\text{up}} \\ V_0 - \delta S_0 + \delta S_{\text{down}} &= H_{\text{down}} \end{aligned}$$

Wenn wir die zweite von der ersten Gleichung abziehen, bekommen wir

$$\delta(S_{\text{up}} - S_{\text{down}}) = H_{\text{up}} - H_{\text{down}}$$

oder

$$\delta = \frac{H_{\text{up}} - H_{\text{down}}}{S_{\text{up}} - S_{\text{down}}}$$

Das können wir etwa in die erste Gleichung einsetzen und bekommen

$$\begin{aligned} V_0 &= H_{\text{up}} - \delta(S_{\text{up}} - S_0) \\ &= H_{\text{up}} - \frac{H_{\text{up}} - H_{\text{down}}}{S_{\text{up}} - S_{\text{down}}} (S_{\text{up}} - S_0) \\ &= H_{\text{up}} \frac{S_{\text{up}} - S_{\text{down}}}{S_{\text{up}} - S_{\text{down}}} - H_{\text{up}} \frac{S_{\text{up}} - S_0}{S_{\text{up}} - S_{\text{down}}} + H_{\text{down}} \frac{S_{\text{up}} - S_0}{S_{\text{up}} - S_{\text{down}}} \\ &= H_{\text{up}} \frac{S_0 - S_{\text{down}}}{S_{\text{up}} - S_{\text{down}}} + H_{\text{down}} \frac{S_{\text{up}} - S_0}{S_{\text{up}} - S_{\text{down}}} \\ &= H_{\text{up}} w_{\text{up}} + H_{\text{down}} w_{\text{down}} \end{aligned}$$

mit den Gewichten

$$\begin{aligned} w_{\text{up}} &= \frac{S_0 - S_{\text{down}}}{S_{\text{up}} - S_{\text{down}}}, \\ w_{\text{down}} &= \frac{S_{\text{up}} - S_0}{S_{\text{up}} - S_{\text{down}}}. \end{aligned}$$