week8b: Das zeitabhängige Black-Scholes Modell und Kalibrierung an Marktpreise, Teil2

Die stochastische Differentialgleichung für das zeitunabhängige Black-Scholes Model

$$\frac{dS_t}{S_t} \;=\; \mu\, dt \,+\, \sigma\, dx_t \tag{1}$$

können wir mit einem kompakten analytischen Ausdruck lösen. Im Kapitel 4 der Finanzmathematik I Vorlesung hatten wir gezeigt, dass

$$S_t \;=\; e^{\sigma x_t \,+\, (\mu - \frac{\sigma^2}{2})t} \tag{2}$$

eine Lösung von (1) ist. Im zeitabhängigen Black-Scholes Modell kann man immer noch eine explizite Formel hinschreiben, das passiert in dem nächsten Lemma. Zum Beweis benötigen wir wieder die Rechenregeln für die Brownsche Bewegung,

$$\begin{aligned} (dx_t)^2 &= dt \\ dx_t\, dt &= 0 \\ (dt)^2 &= 0 \end{aligned} \tag{3}$$

Mit der Numerierung aus dem Gesamt-Skript aus `http://hsrm-mathematik.de/WS201516/master/option-pricing/Chapter13.pdf` gilt dann das folgende

Lemma 13.3: Let $\{x_t\}_{t\geq 0}$ be a Brownian motion and let $\{S_t\}_{t\geq 0}$ be given by

$$S_t \;=\; S_0\, e^{\int_0^t \sigma_u\, dx_u \,+\, \int_0^t (\mu_u - \frac{\sigma_u^2}{2}) du} \tag{4}$$

with some deterministic drift function μ_t and volatility function σ_t. Then S_t is a solution of the time dependent Black-Scholes SDE

$$\tfrac{dS_t}{S_t} \;=\; \mu_t\, dt \,+\, \sigma_t\, dx_t\ .$$

Proof: Ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine beliebige Funktion und X_t ein stochastischer Prozess, dann gilt mit der Ito-Formel

$$df(X_t) \;=\; f'(X_t)\, dX_t \,+\, \tfrac{1}{2}\, f''(X_t)\, (dX_t)^2 \tag{5}$$

Das wenden wir jetzt folgendermassen an: Let I_t denote the stochastic integral

$$I_t \;:=\; \int_0^t \sigma_u\, dx_u \tag{6}$$

and let F_t abbreviate the deterministic function

$$F_t \;:=\; \int_0^t (\mu_u - \tfrac{\sigma_u^2}{2})du \tag{7}$$

such that

$$S_t \;=\; e^{I_t+F_t} \;=:\; e^{X_t} \tag{8}$$

We have

$$dI_t \;=\; \sigma_t\, dx_t \tag{9}$$
$$(dI_t)^2 \;=\; (\sigma_t\, dx_t)^2 \;=\; \sigma_t^2\, dt \tag{10}$$

and, since F_t is deterministic,

$$dF_t \;=\; \big(\mu_t - \tfrac{\sigma_t^2}{2}\big)dt \tag{11}$$
$$(dF_t)^2 \;=\; 0$$
$$(dI_t + dF_t)^2 \;=\; (dI_t)^2 \;=\; \sigma_t^2\, dt \tag{12}$$

such that (also $X_t := I_t + F_t$ in der Ito-Formel von oben und $f(X) := e^X$)

$$\begin{aligned} dS_t \;&=\; d\big(e^{I_t+F_t}\big) \\ &\overset{\text{Ito-Formel}}{=}\; e^{I_t+F_t}\, d(I_t+F_t) \;+\; \tfrac{1}{2}\, e^{I_t+F_t}\, [d(I_t+F_t)]^2 \\ &=\; S_t \big[\sigma_t\, dx_t \;+\; (\mu_t - \tfrac{\sigma_t^2}{2})dt\big] \;+\; \tfrac{1}{2}\, S_t\, \sigma_t^2\, dt \\ &=\; S_t \big[\sigma_t\, dx_t \;+\; \mu_t\, dt\big] \end{aligned} \tag{13}$$

which proves the lemma. ■

Our next task is to determine a general pricing formula for options with underlyings which have a time-dependent Black-Scholes dynamics. There is the following

Theorem 13.4: Let $\{x_t\}_{0<t\leq T}$ be a Brownian motion and let

$$S_t^{(\mu)} \;:=\; S_0\, e^{\int_0^t \sigma_u\, dx_u + \int_0^t (\mu_u - \frac{\sigma_u^2}{2})du} \tag{14}$$

be an underlying with time-dependent Black-Scholes price dynamics. Let

$$0 \leq t_1 < \cdots < t_m \leq T$$

be some observation times and let $H : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ be some option payoff which pays the amount

$$H\big(S_{t_1}^{(\mu)}, \cdots, S_{t_m}^{(\mu)}\big)$$

at maturity T to the option buyer. Then the fair price V_0 at time $t = 0$ of this option is given by the following formula:

$$V_0 \;=\; e^{-rT}\mathsf{E}_W\big[H(S_{t_1}^{(r)}, ..., S_{t_m}^{(r)})\big] \tag{15}$$

Here $\mathsf{E}_W[\,\cdot\,]$ denotes the expectation value with respect to the standard Wiener measure and $S_t^{(r)}$ is the risk neutral price process given by

$$S_t^{(r)} \;:=\; S_0\, e^{\int_0^t \sigma_u\, dx_u + \int_0^t (r - \frac{\sigma_u^2}{2})du} \tag{16}$$

Proof: $\rightarrow$ machen wir an der Tafel (ist nicht klausurrelevant). ■