week8a: Das zeitabhängige Black-Scholes Modell und Kalibrierung an Marktpreise, Teil1

Die Volatilität eines Underlyings, einer Aktie, eines Aktienindex oder eines Währungswechselkurses etwa, also die Schwankungsfreudigkeit eines solchen liquide handelbaren Finanzinstrumentes, ist nicht konstant, wie im Black-Scholes Modell angenommen, sondern es gibt Phasen mit hoher Volatilität und Phasen mit niedriger Volatilität. Um dieser Tatsache modelltechnisch gerecht zu werden, werden in Banken Modelle mit stochastischer Volatilität eingesetzt. Bei solchen Modellen ist der Parameter σ aus der Black-Scholes SDE,

$$\frac{dS_t}{S_t} \;=\; \mu\, dt \,+\, \sigma\, dx_t \tag{1}$$

keine Konstante mehr, sondern er ist selber gegeben durch einen stochastischen Prozess mit neuen Zufallszahlen, also neben den Zufallszahlen in der Brwonschen Bewegung dx_t in (1) gibt es noch eine zweite Brownsche Bewegung y_t und das σ wird dann ein $\sigma_t = \sqrt{\nu_t}$ und für die instantane Varianz ν_t schreibt man dann noch eine zweite SDE hin, etwa von der folgenden Form:

$$d\nu_t \;=\; \kappa(\bar{\nu} - \nu_t)dt \,+\, \beta\sqrt{\nu_t}\, dy_t \tag{2}$$

das entspricht dann der Spezifikation des Heston Stochastic Volatility Models. Das wird dann auch mathematisch schon recht sophisticated.

Wir wollen hier erstmal einen kleineren Schritt machen und den konstanten Parameter σ aus (1) durch eine zeitabhängige, aber deterministische Funktion (also ohne neue Zufallszahlen) σ_t ersetzen, das ist dann das zeitabhängige Black-Scholes Modell. Die Hauptresultate dieses Kapitels sind dann (mit der Numerierung aus `http://hsrm-mathematik.de/WS201516/master/option-pricing/Chapter13.pdf`)

- das Theorem 13.5, was allgemein sagt, wie der Preis einer Option im zeitabhängigen Black-Scholes Modell zu berechnen ist,
- dann das Korollar 13.6, in dem das Theorem 13.5 konkret auf Standard Call- und Put-Optionen angewendet wird,
- und die Formel (13.61) ganz am Ende in der Section 'Calibration to Market', die den Zusammenhang zwischen instantaner Volatilität, das ist das σ_t aus dem zeitabhängigen Black-Scholes Modell (3) unten, und der sogenannten impliziten Volatilität, das ist die konstante Volatilität σ, die man in die zeitunabhängigen Black-Scholes Formel einsetzen müsste, um den gegebenen Markpreis einer Option zu treffen, die also den Zusammenhang zwischen diesen beiden Grössen angibt. Zu dieser Formel kann man dann auch immer eine Standardaufgabe in der Klausur machen, das haben wir dann nächste Woche auf dem Übungsblatt.

In dem Moment, wenn das stochastische Modell für die Preisdynamik des Underlyings geändert wird, hat man dann natürlich sofort die Frage, ob das mit Payoff-Replication alles noch so klappt. Bei den Modellen mit stochastischer Volatilität ist das absolut nichttrivial. Hier, im zeitabhängigen Black-Scholes Modell, geht das im wesentlichen alles so wie beim zeitunabhängigen Black-Scholes Modell, und das wäre jetzt also konkret das Topic für das Material heute. Also more theoretical in spirit, und dementsprechend dann auch eher weniger klausurrelevant, aber konzeptionell natürlich eine wichtige Sache.

The time-dependent Black-Scholes model is given by the following stochastic differential equation (SDE) for an underlying asset price process:

$$\frac{dS_t}{S_t} \;=\; \mu_t\,dt \,+\, \sigma_t\,dx_t \tag{3}$$

where μ_t and σ_t are deterministic (that is, non-stochastic) functions of time t. Let us first convince ourselfs that exact payoff replication in this model is still possible. For the time-independent Black-Scholes model introduced in Chapter 4 and 5 in FM I we did that by approximating the model through a suitable Binomial model and using the fact the arbitrary payoffs can be replicated in the Binomial model. Here we will follow a different path and show this directly in continuous time by using the continuous time formalism introduced in Chapter 8.

Let us start by proving again that exact payoff replication is possible for the time-independent Black-Scholes model given by

$$\frac{dS_t}{S_t} \;=\; \mu\,dt \,+\, \sigma\,dx_t \tag{4}$$

The time-dependent case (3) will then be a straightforward generalization. Our standard equation of Chapter 1 for the value of a replicating portfolio,

$$v_{t_k} \;=\; v_{t_0} + \sum_{j=1}^{k} \delta_{t_{j-1}}(s_{t_j} - s_{t_{j-1}})$$

reads in continuous time

$$v_t \;=\; v_{t_0} + \int_{t_0}^{t} \delta_u\,ds_u \tag{5}$$

where the stochastic integral on the right hand side of (5) is an Ito-integral. From the analysis of Chapter 7 we know that the number of stocks δ_t to be hold at time t must be equal to

$$\delta_t \;=\; \frac{\partial V(S_t,t)}{\partial S_t} \tag{6}$$

where the undiscounted value $V = V(S_t,t)$ of the replicating portfolio at time t, or equivalently, the option price at time t, is a solution of the Black-Scholes partial differential equation (PDE)

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\sigma^2}{2}S^2\frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS\frac{\partial V}{\partial S} - rV \;=\; 0 \tag{7}$$

with final condition

$$V(S_T, t = T) \;=\; H(S_T) \tag{8}$$

Thus the statement "exact payoff replication is possible in the Black-Scholes model" is equivalent (actually at this point only for non path-dependent payoffs) to the following mathematical statement:

Theorem 13.1: Let $V = V(S_t, t)$ be the solution to (7,8) and let $\delta_t = \delta_t(S_t)$ be given by (6). Now let $S_t^{(\mu)}$ be any 'real world' (not necessarily risk neutral) stochastic path realization of the time-independent Black-Scholes model given by (4) and let $s_t^{(\mu)} = e^{-rt} S_t^{(\mu)}$ denote the discounted realized price path (we assume $t_0 = 0$). Then we have for any such stochastic path realization:

$$e^{-rT} H(S_T^{(\mu)}) \;=\; V_0 + \int_0^T \delta_t(S_t^{(\mu)})\, ds_t^{(\mu)} \tag{9}$$

with $V_0 = V(S_0^{(\mu)}, t = 0)$ being the option price for the payoff H.

Proof: Let $V = V(S_t, t)$ be the solution to (7,8). Because of

$$\begin{aligned} V(S_0, 0) &= V_0 \qquad (10) \\ V(S_T, T) &= H(S_T) \\ v(S_T, T) = e^{-rT} V(S_T, T) &= e^{-rT} H(S_T) =: h(S_T) \qquad (11) \end{aligned}$$

we can write

$$\begin{aligned} e^{-rT} H(S_T) - V_0 &= e^{-rT} V(S_T, T) - e^{-r0} V(S_0, 0) \\ &= v(S_T, T) - v(S_0, 0) \\ &= \textstyle\int_0^T dv(S_t, t) \qquad (12) \end{aligned}$$

with

$$dv(S_t, t) \;=\; v(S_t, t) - v(S_{t-dt}, t - dt) \tag{13}$$

The function $v = e^{-rt} V$ is given by a product of a deterministic function e^{-rt} and a stochastic function V (because the S which is put into V is stochastic). In that case, the usual product rule of differentiation from ordinary calculus can be used (or more precisely, the covariation $d(e^{-rt}) \cdot dV = 0$ vanishes) to obtain

$$\begin{aligned} dv &= d(e^{-rt} V) \\ &= d(e^{-rt})\, V + e^{-rt}\, dV \\ &= -r\, e^{-rt}\, dt\, V + e^{-rt}\, dV \\ &= -r\, v\, dt + e^{-rt}\, dV \qquad (14) \end{aligned}$$

The quantity

$$dV \;=\; dV(S_t, t) \;=\; V(S_t, t) - V(S_{t-dt}, t - dt)$$

on the right hand side of (14) has to be calculated with the Ito-Formula from Chapter 8, we have

$$\begin{aligned} dV(S_t,t) &= \tfrac{\partial V}{\partial S_t} dS_t + \tfrac{1}{2}\tfrac{\partial^2 V}{\partial S_t^2}(dS_t)^2 + \tfrac{\partial V}{\partial t} dt \\ &\overset{(6)}{=} \delta_t\, dS_t + \tfrac{1}{2}\tfrac{\partial^2 V}{\partial S_t^2}(dS_t)^2 + \tfrac{\partial V}{\partial t} dt \end{aligned} \tag{15}$$

or

$$\begin{aligned} e^{-rt}\,dV &= \delta_t\, e^{-rt}\, dS_t + e^{-rt}\,\tfrac{1}{2}\tfrac{\partial^2 V}{\partial S_t^2}(dS_t)^2 + e^{-rt}\,\tfrac{\partial V}{\partial t} dt \\ &= \delta_t\left[e^{-rt}\, dS_t + d(e^{-rt})\, S_t\right] - \delta_t\, d(e^{-rt})\, S_t + e^{-rt}\,\tfrac{1}{2}\tfrac{\partial^2 V}{\partial S_t^2}(dS_t)^2 + e^{-rt}\,\tfrac{\partial V}{\partial t} dt \\ &= \delta_t\, ds_t - \delta_t\, d(e^{-rt})\, S_t + e^{-rt}\,\tfrac{1}{2}\tfrac{\partial^2 V}{\partial S_t^2}(dS_t)^2 + e^{-rt}\,\tfrac{\partial V}{\partial t} dt \end{aligned}$$

such that from (14) we get

$$\begin{aligned} dv &= d(e^{-rt})\, V + e^{-rt}\, dV \\ &= \delta_t\, ds_t - \delta_t\, d(e^{-rt})\, S_t + e^{-rt}\,\tfrac{1}{2}\tfrac{\partial^2 V}{\partial S_t^2}(dS_t)^2 + \left[\tfrac{\partial e^{-rt}}{\partial t} V + e^{-rt}\tfrac{\partial V}{\partial t}\right] dt \\ &= \delta_t\, ds_t - \tfrac{\partial V}{\partial S_t}\,(-r)e^{-rt}\, S_t\, dt + \tfrac{1}{2}\tfrac{\partial^2 v}{\partial S_t^2}(dS_t)^2 + \tfrac{\partial v}{\partial t}\, dt \\ &= \delta_t\, ds_t + \tfrac{1}{2}\tfrac{\partial^2 v}{\partial S_t^2}(dS_t)^2 + \left[\tfrac{\partial v}{\partial t} + rS_t\,\tfrac{\partial v}{\partial S_t}\right] dt \end{aligned} \tag{16}$$

Observe that equation (16) holds for any stochastic process S_t and any function $v = e^{-rt}V$, so far we have not used the Black-Scholes dynamics (4) or the Black-Scholes PDE (7).
Now suppose that S_t is given by the Black-Scholes dynamics (4). Then we have

$$\left(\tfrac{dS_t}{S_t}\right)^2 = \sigma^2\,(dx_t)^2 = \sigma^2\, dt \tag{17}$$

and (16) becomes

$$dv = \delta_t\, ds_t + \left[\tfrac{\sigma^2}{2} S_t^2 \tfrac{\partial^2 v}{\partial S_t^2} + \tfrac{\partial v}{\partial t} + rS_t\,\tfrac{\partial v}{\partial S_t}\right] dt \tag{18}$$

The square bracket in (18) is identical to

$$e^{-rt}\Big[\frac{\sigma^2}{2} S_t^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S_t^2} + \frac{\partial V}{\partial t} - rV + rS_t\,\frac{\partial V}{\partial S_t}\Big] \overset{(7)}{=} 0 \tag{19}$$

and thus we end up with

$$\begin{aligned} e^{-rT} H(S_T) - V_0 &\overset{(12)}{=} \textstyle\int_0^T dv(S_t,t) \\ &\overset{(18)}{=} \textstyle\int_0^T \delta_t\, ds_t + \int_0^T \left[\tfrac{\sigma^2}{2} S_t^2 \tfrac{\partial^2 v}{\partial S_t^2} + \tfrac{\partial v}{\partial t} + rS_t\,\tfrac{\partial v}{\partial S_t}\right] dt \\ &\overset{(19)}{=} \textstyle\int_0^T \delta_t\, ds_t \end{aligned} \tag{20}$$

which proves the theorem. ■

By going through the above proof, the following statement follows immediately:

Corollary 13.2: Let $V = V(S_t, t)$ be the solution of the time-dependent Black-Scholes PDE given by

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\sigma_t^2}{2} S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS\frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0 \tag{21}$$

with some time dependent volatility function σ_t, with final condition

$$V(S_T, t = T) \;\;=\;\; H(S_T) \tag{22}$$

and let $\delta_t = \delta_t(S_t)$ be given by (6). Now let $S_t^{(\mu)}$ be any stochastic path realization of the time-dependent Black-Scholes model given by (3) and let $s_t^{(\mu)} = e^{-rt} S_t^{(\mu)}$ denote the discounted realized price path (we assume $t_0 = 0$). Then we have for any such stochastic path realization:

$$e^{-rT}\, H(S_T^{(\mu)}) \;\;=\;\; V_0 \;+\; \int_0^T \delta_t(S_t^{(\mu)})\, ds_t^{(\mu)} \tag{23}$$

with $V_0 = V(S_0^{(\mu)}, t = 0)$ being the option price for the payoff H.

Die Formel (23) meint dann nicht anderes als: Mit der Handelsstrategie “halte δ_t Aktien zum Zeitpunkt t”, mit

$$\delta_t \;\;=\;\; \frac{\partial V(S_t, t)}{\partial S_t}$$

und $V(S_t, t)$ der Zeit-t-Preis der Option H im zeitabhängigen Black-Scholes Modell, also mit einer solchen Handelsstrategie kann die Optionsauszahlung $H = H(S_T)$ auch im zeitabhängigen Black-Scholes Modell immer noch repliziert werden. Bei Modellen mit stochastischer Volatilität ist das nicht mehr so einfach.