week7a: Exotische Optionen im Black-Scholes Modell, Teil2
Die All-Time-High Option

Die All-Time-High Option zahlt den maximalen Preis des Underlyings aus, der während der Laufzeit erzielt wurde. Der Payoff ist also

$$H_{\mathrm{ATH}}\big(\{S_t\}_{0\leq t\leq T}\big) \;\;:=\;\; \max_{0\leq t\leq T} S_t \tag{1}$$

und das ist sicherlich eine sehr attraktive Auszahlungsfunktion. Wenn wir nicht mehr bei Zeit 0, sondern bei Zeit $t \in [0,T]$ sind, dann wird der Preis dieser Option natürlich auch davon abhängen, wie gross der maximale Preis des Underlyings ist, der bisher schon erzielt wurde. Das heisst, wenn wir bei Zeit t sind, dann wird der Preis V_t nicht nur von dem aktuellen Underlyingpreis S_t abhängen, sondern auch von dem bis dahin realisierten Maximum,

$$M_t \;\;:=\;\; \max_{0\leq s\leq t} S_s \tag{2}$$

Im Gesamt-Skript FM I+II wird im Kapitel 11

`http://hsrm-mathematik.de/WS201516/master/option-pricing/Chapter11.pdf`

im Theorem 11.3 die folgende Formel bewiesen (wir sind hier in der FM II im Kapitel 4, hatten ein Thm 4.1 letzte Woche, also dann jetzt ein Thm 4.2):

Theorem 4.2: Let $\kappa = \frac{2r}{\sigma^2}$. Then the time-$t$ price V_t of the all-time-high option (1) is given by

$$V_t \;\;=\;\; e^{-r\tau}\Big\{ M_t\, N(d_1) \;+\; e^{r\tau}\, S_t\, N(d_{0,+}) \;+\; \tfrac{1}{\kappa}\Big[e^{r\tau}\, S_t\, N(d_{0,+}) \;-\; S_t^{1-\kappa}\, M_t^{\kappa}\, N(d_{0,-})\Big]\Big\} \tag{3}$$

Here $M_t := \max_{0\leq s\leq t} S_s$ is the current realized maximum up to time t, $\tau = T - t$ is the remaining time to maturity and the d's are given by

$$d_{0,\pm} \;\;:=\;\; \frac{\log\left[\frac{S_t}{M_t}\right] + \frac{\sigma^2}{2}\tau}{\sigma\sqrt{\tau}} \;\pm\; \frac{r}{\sigma}\sqrt{\tau} \tag{4}$$

$$d_1 \;\;:=\;\; \frac{\log\left[\frac{M_t}{S_t}\right] + (\frac{\sigma^2}{2} - r)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}} \tag{5}$$

Proof: Das ist eine etwas längere Rechnung. Konzeptionell ist das aber nicht wesentlich anders als die Rechnung, die wir schon bei dem Down-and-Out Call gemacht haben, deswegen lassen wir das hier mal weg. ■

Anstatt uns die doch etwas aufwändige und technische Rechnung anzuschauen, wollen wir versuchen, die Formel (3) etwas zu plausibilisieren. Schauen wir uns vielleicht zunächst einmal den Limes $\tau \to 0$ an. Also, wir sind nahe bei Laufzeitende, $t \to T$. Dann muss der Preis $V_{t=T}$ gleich dem Payoff sein, und der Payoff ist das realisierte Maximum $M_{t=T}$, also es sollte gelten:

$$\lim_{t\to T} V_t \;=\; M_T \tag{6}$$

Schauen wir uns die d's an: Der Quotient S_T/M_T wird typischerweise kleiner als 1 sein, da das Maximum irgendwann früher realisiert wurde. Das $\tau = T - t$ ist ja die Restlaufzeit, also die geht gegen 0. Aus den Gleichungen (4) und (5) folgt dann also

$$\begin{aligned} \lim_{t\to T} d_{0,\pm} &= -\infty \\ \lim_{t\to T} d_1 &= +\infty \end{aligned}$$

Wegen

$$\begin{aligned} N(-\infty) &= 0 \\ N(+\infty) &= 1 \end{aligned}$$

bekommen wir dann also mit der Pricing-Formel (3):

$$\lim_{t\to T} V_t \;=\; e^{-r\,0}\left\{ M_T \cdot 1 \;+\; e^{r\,0}\, S_T \cdot 0 \;+\; \tfrac{1}{\kappa}\left[e^{r\,0}\, S_T \cdot 0 \;-\; S_T^{1-\kappa}\, M_T^{\kappa} \cdot 0 \right] \right\} \;=\; M_T \tag{7}$$

das macht also schon mal Sinn.

Als nächstes wollen wir den Limes Zinsen $r \to 0$ betrachten. Definieren wir dazu ein neues d, und zwar

$$d \;:=\; \frac{\log\left[\frac{M_t}{S_t}\right] + \frac{\sigma^2}{2}\tau}{\sigma\sqrt{\tau}} \tag{8}$$

so dass also

$$\lim_{r\to 0} d_1 \;=\; d \tag{9}$$

gilt. Weiterhin haben wir

$$\begin{aligned} d_0 \;:=\; \lim_{r\to 0} d_{0,\pm} &= \frac{\log\left[\frac{S_t}{M_t}\right] + \frac{\sigma^2}{2}\tau}{\sigma\sqrt{\tau}} \\ &= \frac{-\log\left[\frac{M_t}{S_t}\right] + \frac{\sigma^2}{2}\tau}{\sigma\sqrt{\tau}} \\ &= -\,\frac{\log\left[\frac{M_t}{S_t}\right] - \frac{\sigma^2}{2}\tau}{\sigma\sqrt{\tau}} \\ &= -\,\frac{\log\left[\frac{M_t}{S_t}\right] + \frac{\sigma^2}{2}\tau - \sigma^2\tau}{\sigma\sqrt{\tau}} \\ &= -\,\frac{\log\left[\frac{M_t}{S_t}\right] + \frac{\sigma^2}{2}\tau}{\sigma\sqrt{\tau}} \;+\; \sigma\sqrt{\tau} \\ &= -d \;+\; \sigma\sqrt{\tau} \end{aligned} \tag{10}$$

Schreiben wir die Formel (3) eben nochmal hin,

$$V_t \;=\; e^{-r\tau}\left\{ M_t\, N(d_1) \;+\; e^{r\tau}\, S_t\, N(d_{0,+}) \;+\; \tfrac{1}{\kappa}\left[e^{r\tau}\, S_t\, N(d_{0,+}) \;-\; S_t^{1-\kappa}\, M_t^{\kappa}\, N(d_{0,-}) \right] \right\}$$

Der Vorfaktor, das $e^{-r\tau}$ geht natürlich gegen 1, und in den ersten beiden Termen können wir auch einfach das r auf 0 setzen, um den Limes zu bekommen. Das geht aber nicht so einfach bei den letzten beiden Termen, die eckige Klammer wird 0 und im Nenner, das $\kappa = 2r/\sigma^2 = r/(\sigma^2/2)$ wird auch 0, also da haben wir dann 0/0 und müssen ein bischen schauen, was das ist. Wir schreiben also:

$$\lim_{r\to 0} V_t \;=\; M_t\,N(d) \;+\; S_t\,N(d_0) \;+\; \mathrm{Term}_3 \tag{11}$$

mit

$$\begin{aligned}
\mathrm{Term}_3 \;&=\; \lim_{\kappa\to 0} \tfrac{1}{\kappa}\Big[e^{r\tau}\,S_t\,N(d_{0,+}) \;-\; S_t^{1-\kappa}\,M_t^{\kappa}\,N(d_{0,-})\Big] \\
&=\; \lim_{\kappa\to 0} \tfrac{1}{\kappa}\Big[e^{\kappa\,\frac{\sigma^2\tau}{2}}\,S_t\,N\big(d_0 + \tfrac{r}{\sigma}\sqrt{\tau}\big) \;-\; S_t^{1-\kappa}\,M_t^{\kappa}\,N\big(d_0 - \tfrac{r}{\sigma}\sqrt{\tau}\big)\Big] \\
&=\; \lim_{\kappa\to 0} \tfrac{1}{\kappa}\Big[e^{\kappa\,\frac{\sigma^2\tau}{2}}\,S_t\,N\big(d_0 + \kappa\tfrac{\sigma\sqrt{\tau}}{2}\big) \;-\; S_t^{1-\kappa}\,M_t^{\kappa}\,N\big(d_0 - \kappa\tfrac{\sigma\sqrt{\tau}}{2}\big)\Big]
\end{aligned} \tag{12}$$

Wir schreiben jetzt

$$\begin{aligned}
&\tfrac{1}{\kappa}\Big[e^{\kappa\,\frac{\sigma^2\tau}{2}}\,S_t\,N\big(d_0 + \kappa\tfrac{\sigma\sqrt{\tau}}{2}\big) \;-\; S_t^{1-\kappa}\,M_t^{\kappa}\,N\big(d_0 - \kappa\tfrac{\sigma\sqrt{\tau}}{2}\big)\Big] \\
&\quad=\; \tfrac{1}{\kappa}\Big[\big(e^{\kappa\,\frac{\sigma^2\tau}{2}} \;-\; 1\big)\,S_t\,N\big(d_0 + \kappa\tfrac{\sigma\sqrt{\tau}}{2}\big)\Big] \\
&\qquad+\; \tfrac{1}{\kappa}\Big[S_t\,\Big\{N\big(d_0 + \kappa\tfrac{\sigma\sqrt{\tau}}{2}\big) \;-\; N\big(d_0 - \kappa\tfrac{\sigma\sqrt{\tau}}{2}\big)\Big\}\;\Big] \\
&\qquad+\; \tfrac{1}{\kappa}\Big[\big(S_t \;-\; S_t^{1-\kappa}\,M_t^{\kappa}\big)\,N\big(d_0 - \kappa\tfrac{\sigma\sqrt{\tau}}{2}\big)\Big] \\
&\overset{\kappa\to 0}{\to}\;\; \tfrac{\sigma^2\tau}{2}\,S_t\,N(d_0) \\
&\qquad+\; S_t\,N'(d_0)\,\sigma\sqrt{\tau} \\
&\qquad+\; S_t\,\lim_{\kappa\to 0}\tfrac{1}{\kappa}\big(1 \;-\; e^{\kappa\log[M_t/S_t]}\big)\,N(d_0) \\
&\quad=\; \tfrac{\sigma^2\tau}{2}\,S_t\,N(d_0) \;+\; S_t\,N'(d_0)\,\sigma\sqrt{\tau} \;-\; S_t\log\big[\tfrac{M_t}{S_t}\big]\,N(d_0)
\end{aligned}$$

Also,

$$\mathrm{Term}_3 \;=\; \tfrac{\sigma^2\tau}{2}\,S_t\,N(d_0) \;+\; S_t\,N'(d_0)\,\sigma\sqrt{\tau} \;-\; S_t\log\big[\tfrac{M_t}{S_t}\big]\,N(d_0) \tag{13}$$

Wir setzen (13) in (11) ein und erhalten die folgende Formel:

Folgerung 4.3: Im Limes Zinsen $r = 0$ ist der Zeit-t-Preis V_t einer All-Time-High Option mit Laufzeit T gegeben durch

$$V_t \;=\; M_t\,N(d) \;+\; S_t\left\{\,N(d_0)\left(1 \;+\; \tfrac{\sigma^2\tau}{2} \;-\; \log\big[\tfrac{M_t}{S_t}\big]\right) \;+\; N'(d_0)\,\sigma\sqrt{\tau}\,\right\} \tag{14}$$

mit

$$d \;=\; \frac{\log[\frac{M_t}{S_t}] + \frac{\sigma^2}{2}\tau}{\sigma\sqrt{\tau}} \tag{15}$$

$$d_0 \;=\; \frac{\log[\frac{S_t}{M_t}] + \frac{\sigma^2}{2}\tau}{\sigma\sqrt{\tau}} \;=\; -d \;+\; \sigma\sqrt{\tau} \tag{16}$$

Insbesondere ist der Preis V_0 zur Startzeit $t = 0$ gegeben durch

$$V_0 \;=\; S_0 \left\{ \, N(\sigma\sqrt{T}/2) \left(2 + \tfrac{\sigma^2 T}{2} \right) \;+\; N'(\sigma\sqrt{T}/2)\, \sigma\sqrt{T} \, \right\} \tag{17}$$

Checken wir vielleicht noch den Grenzfall $\sigma \to 0$. Da die Zinsen auch 0 sind, ist in dem Fall $S_t = S_0$ für alle t so dass also auch das Maximum $M_t = S_0$ ist. Damit ist $\log[\frac{M_t}{S_t}] = \log 1 = 0$ und beide d's gehen nach 0,

$$\lim_{\sigma\to 0} d \;=\; \lim_{\sigma\to 0} d_0 \;=\; 0 \tag{18}$$

Damit liefert die Formel (14)

$$\lim_{\sigma\to 0} V_t \;=\; S_0\, N(0) \;+\; S_0 \left\{ \, N(0) \left(1 + 0 - \log 1 \right) \;+\; N'(0)\, 0 \sqrt{\tau} \, \right\} \;=\; S_0 \, ,$$

das macht also auch alles Sinn. Erinnern Sie sich daran, dass $N(0) = 1/2$ ist. Wir werden die Formel (3) dann noch mit einer Monte-Carlo Simulation verifizieren.

Excel/VBA-Demo: Überprüfen Sie die analytische Pricing-Formel (3) für eine All-Time-High Option aus dem Theorem 4.2 mit Hilfe einer Monte Carlo Simulation.