week5b: Exotische Optionen im Black-Scholes Modell, Teil1
Barrier-Optionen

Wir müssen zunächst noch den Teil (c) vom Theorem 3.5 vom letzten Mal beweisen. Dann können wir das Theorem benutzen, um eine analytische Formel für den Preis einer Down-and-Out Barrier Call-Option herzuleiten. Es gilt das folgende

Theorem 4.1: Consider the barrier option with payoff

$$H(S_T) = \max\{S_T - K, 0\}\,\chi\big(\min_{0\le t\le T} S_t > B\big), \quad K \ge B > 0 \tag{1}$$

a 'down-and-out' Barrier-Call with strike K, barrier B and maturity T. Let the asset price dynamics be given by a Black-Scholes model and let $V_{\mathrm{Call},K}(S,t)$ be the time-t Black-Scholes price of the call $\max\{S_T - K, 0\}$ given by Theorem 6.1 of FM1 (das waren die Black-Scholes Formeln), and let $\kappa := \frac{2r}{\sigma^2}$. Then the time-$t$ price of the barrier option (1) is given by

$$V_{\mathrm{Barrier}}(S_t,t) \;=\; V_{\mathrm{Call},K}(S_t,t) - \big(\tfrac{S_t}{B}\big)^{1-\kappa}\, V_{\mathrm{Call},K}\big(\tfrac{B^2}{S_t},t\big) \tag{2}$$

More precisely, the time-t price is given by (2) only if $\min_{0\le\tilde t\le t} S_{\tilde t} > B$, otherwise it is 0, the option is dead.

Proof: Wir setzen wieder

$$c \;:=\; \frac{r}{\sigma} - \frac{\sigma}{2}$$

Im letzten Kapitel 3 hatten wir bereits mit Hilfe der Variablen Substitution $y_t = x_t + ct$ und dem Girsanov-Lemma 3.1 die folgende Darstellung für den Preis des Barrier-Calls hergeleitet, das ist die Gleichung (8) aus dem `week4a.pdf`:

$$V_{\mathrm{Barrier}}(S_0, t=0) \;=\; e^{-rT}\int H\left(S_0\, e^{\sigma y_T}, S_0\, e^{\sigma \min_{0\le t\le T}\{y_t\}}\right) e^{cy_T - \frac{c^2}{2}T} dW(\{y_t\}_{0<t\le T})) \tag{3}$$

Wir hatten dann mit einem formalen Trick, mit dieser Zerlegung der 1, das war die Gleichung (11) aus dem `week4a.pdf`, den Erwartungswert bezüglich des Wiener-Masses in diese Funktion

$$\rho_{F,G}(a,b) \;=\; \rho_{y_T, \min_{0\le t\le T}\{y_t\}}(a,b)$$

verschoben. Das hatten wir in Gleichung (13) gemacht. Und zwar war das $I(a,b)$ in Gleichung (13) gegeben durch den Integranden in Gleichung (3) hier weiter oben (das a war vorher ein $F(\{y_t\}) := y_T$ und das b war vorher ein $G(\{y_t\}) := \min_{0\le t\le T}\{\,y_t\,\}$)

$$I(a,b) \;:=\; H\left(S_0\, e^{\sigma a}, S_0\, e^{\sigma b}\right)\; e^{ca - \frac{c^2}{2}T}$$

Als Resultat bekommen wir dann also, mit $\rho_{F,G} = \rho_{y_T, \min y_t}$,

$$\begin{aligned} V_{\text{Barrier}}(S_0, t=0) &= e^{-rT} \int_{\mathbb{R}^2} I(a,b)\, \rho_{F,G}(a,b)\, da\, db \\ &= e^{-rT} \int_{\mathbb{R}^2} H\left(S_0\, e^{\sigma a}, S_0\, e^{\sigma b}\right)\; e^{ca - \frac{c^2}{2}T}\, \rho_{y_T, \min_{0\le t\le T}\{y_t\}}(a,b)\, da\, db \\ &= e^{-rT} \int_{\mathbb{R}^2} \left(S_0\, e^{\sigma a} - K\right)_+ \chi\left(\, S_0\, e^{\sigma b} > B\,\right) e^{ca - \frac{c^2}{2}T}\, \rho_{y_T, \min_{0\le t\le T}\{y_t\}}(a,b)\, da\, db \end{aligned} \tag{4}$$

wobei wir die Notation

$$\left(S_0\, e^{\sigma a} - K\right)_+ \;:=\; \max\left\{\, S_0\, e^{\sigma a} - K\;,\; 0\,\right\}$$

benutzen wollen. Und für das $\rho_{y_T, \min_{0\le t\le T}\{y_t\}}(a,b)$, da war der Erwartungswert bezüglich des Wiener-Masses drin, hatten wir schliesslich in Theorem 3.5 eine geschlossene Formel hergeleitet. Das heisst, zunächst hatten wir die Formel

$$\mathsf{P}_W\Big(\, y_T \in [a, a+da),\ \max_{0\le t\le T} y_t \in [b, b+db)\,\Big) \;=\; \rho_{y_T, \max_{0\le t\le T}\{y_t\}}(a,b)\; da\, db\;. \tag{5}$$

mit

$$\rho_{y_T, \max_{0\le t\le T}\{y_t\}}(a,b) \;=\; -\tfrac{2}{T}\, \varphi'\big(\tfrac{2b-a}{\sqrt{T}}\big)\; \chi(a<b)\;. \tag{6}$$

bewiesen. Nun gilt aber, da die Brownschen Pfade $\{y_t\}$ und $\{-y_t\}$ dieselbe Wahrscheinlichkeit haben,

$$\begin{aligned} &\mathsf{P}_W\Big(\, y_T \in [a, a+da),\ \max_{0\le t\le T} y_t \in [b, b+db)\,\Big) \\ &\quad= \mathsf{P}_W\Big(\, -y_T \in [a, a+da),\ \max_{0\le t\le T} \{-y_t\} \in [b, b+db)\,\Big) \\ &\quad= \mathsf{P}_W\Big(\, y_T \in (-a-da, -a],\ -\min_{0\le t\le T} y_t \in [b, b+db)\,\Big) \\ &\quad= \mathsf{P}_W\Big(\, y_T \in (-a-da, -a],\ \min_{0\le t\le T} y_t \in (-b-db, -b]\,\Big) \\ &\quad= \rho_{y_T, \min_{0\le t\le T}\{y_t\}}(-a,-b)\; da\, db\;. \end{aligned} \tag{7}$$

also bekommen wir die Gleichung

$$\rho_{y_T, \min_{0\le t\le T}\{y_t\}}(-a,-b) \;=\; \rho_{y_T, \max_{0\le t\le T}\{y_t\}}(a,b) \;=\; -\tfrac{2}{T}\, \varphi'\big(\tfrac{2b-a}{\sqrt{T}}\big)\; \chi(a<b)$$

oder

$$\rho_{y_T, \min_{0\le t\le T}\{y_t\}}(a,b) \;=\; -\tfrac{2}{T}\, \varphi'\big(\tfrac{a-2b}{\sqrt{T}}\big)\; \chi(a>b) \tag{8}$$

Gleichung (8) können wir jetzt in Gleichung (4) einsetzen und erhalten

$$
\begin{aligned}
V_{\text{Barrier}}(S_0, t=0) \;=\;& \\
& e^{-rT} \int_{\mathbb{R}^2} \big(S_0\, e^{\sigma a} - K\big)_+ \, \chi\big(\, S_0\, e^{\sigma b} > B\,\big)\, e^{ca - \frac{c^2}{2} T}\, \rho_{y_T, \min_{0 \le t \le T}\{y_t\}}(a,b)\, da\, db \\
&= e^{-rT} \int_{\mathbb{R}^2} \big(S_0\, e^{\sigma a} - K\big)_+ \, \chi\big(\, S_0\, e^{\sigma b} > B\,\big)\, e^{ca - \frac{c^2}{2} T} \big(-\tfrac{2}{T}\big)\, \varphi'\big(\tfrac{a-2b}{\sqrt{T}}\big)\, \chi(a > b)\, da\, db \\
&= e^{-rT} \int_{\mathbb{R}} da\, \big(S_0\, e^{\sigma a} - K\big)_+ \, e^{ca - \frac{c^2}{2} T} \int_{\mathbb{R}} db\, \chi\Big(a > b > -\tfrac{1}{\sigma} \log\big(\tfrac{S_0}{B}\big)\Big) \big(-\tfrac{2}{T}\big)\, \varphi'\big(\tfrac{a-2b}{\sqrt{T}}\big) \\
&= e^{-rT} \int_{\mathbb{R}} da\, \big(S_0\, e^{\sigma a} - K\big)_+ \, e^{ca - \frac{c^2}{2} T}\, \chi\Big(a > -\tfrac{1}{\sigma} \log\big(\tfrac{S_0}{B}\big)\Big)\; \tfrac{1}{\sqrt{T}}\, \varphi\big(\tfrac{a-2b}{\sqrt{T}}\big)\Big|_{-\frac{1}{\sigma}\log\left(\frac{S_0}{B}\right)}^{a} \qquad (9) \\
&= e^{-rT} \int_{\mathbb{R}} da\, \big(S_0\, e^{\sigma a} - K\big)_+ \, e^{ca - \frac{c^2}{2} T}\, \tfrac{1}{\sqrt{T}} \Big[\varphi\big(-\tfrac{a}{\sqrt{T}}\big) - \varphi\big(\tfrac{a + \frac{2}{\sigma}\log\left(\frac{S_0}{B}\right)}{\sqrt{T}}\big)\Big] \\
&= e^{-rT} \int_{\mathbb{R}} da\, \big(S_0\, e^{\sigma a} - K\big)_+ \, \tfrac{1}{\sqrt{2\pi T}}\, e^{-\frac{(a-cT)^2}{2T}} \\
&\quad\; - \; e^{-rT} \int_{\mathbb{R}} da\, \big(S_0\, e^{\sigma a} - K\big)_+ \, \tfrac{1}{\sqrt{2\pi T}}\, e^{-\frac{\left(a + \frac{2}{\sigma}\log\left(\frac{S_0}{B}\right)\right)^2}{2T}}\; e^{ca - \frac{c^2}{2} T} \\
&= e^{-rT} \int_{\mathbb{R}} da\, \big(S_0\, e^{\sigma a + \sigma c T} - K\big)_+ \, \tfrac{1}{\sqrt{2\pi T}}\, e^{-\frac{a^2}{2T}} \\
&\quad\; - \; e^{-rT} \big(\tfrac{S_0}{B}\big)^{-\frac{2c}{\sigma}} \int_{\mathbb{R}} da\, \big(S_0\, e^{\sigma a - 2\log\left(\frac{S_0}{B}\right)} - K\big)_+ \, \tfrac{1}{\sqrt{2\pi T}}\, e^{-\frac{a^2}{2T}}\; e^{ca - \frac{c^2}{2} T} \\
&= e^{-rT} \int_{\mathbb{R}} da\, \big(S_0\, e^{\sigma a + (r - \frac{\sigma^2}{2})T} - K\big)_+ \, \tfrac{1}{\sqrt{2\pi T}}\, e^{-\frac{a^2}{2T}} \\
&\quad\; - \; e^{-rT} \big(\tfrac{S_0}{B}\big)^{-(\kappa-1)} \int_{\mathbb{R}} da\, \big(\tfrac{B^2}{S_0}\, e^{\sigma a} - K\big)_+ \, \tfrac{1}{\sqrt{2\pi T}}\, e^{-\frac{(a-cT)^2}{2T}} \\
&= V_{\text{Call}}(S_0, 0) - \big(\tfrac{S}{B}\big)^{-(\kappa-1)}\, V_{\text{Call}}\big(\tfrac{B^2}{S_0}, 0\big) \qquad (10)
\end{aligned}
$$

Observe that in (9) we used that $K \ge B$ since otherwise a may be less than $\frac{1}{\sigma}\log\frac{B}{S_0}$. This proves the theorem for $t = 0$. For general $t \in [0, T]$, the result is obtained by a similar calculation with T substituted by time to maturity $\tau := T - t$. ■

Excel/VBA-Demo: Überprüfen Sie die analytische Pricing-Formel für einen Down-and-Out Barrier-Call aus dem Theorem 4.1 mit Hilfe einer Monte Carlo Simulation.