week4a: Probabilities Involving the Minimum and the Maximum of a Brownian Motion, Teil1

Das nächste grössere Ziel wäre jetzt die analytische Berechnung von Preisen von Barrier-Optionen und anderen pfadabhängigen Optionen im Black-Scholes Modell. Die Auszahlung von Barrier-Optionen hängt davon ab, ob während der Laufzeit der Option, also nicht erst am Ende, eine gewisse Preis-Barriere über- oder unterschritten wurde. Ganz konkret, die Auszahlungsfunktion eines so genannten Down-and-Out Calls mit Strike oder Ausübungspreis K und Barriere B ist gegeben durch

$$H_{\mathrm{Down-and-Out}}\left(\{S_t\}_{0\leq t\leq T}\right) \;:=\; \max[S_T-K,0]\times\chi\big(\min_{t\in[0,T]} S_t \,\geq\, B\big)$$

wobei die Indikator-Funktion $\chi(\cdots)$ wie üblich definiert ist durch

$$\chi(A) \;:=\; \begin{cases} 1 & \text{falls die Aussage A wahr ist}\,, \\ 0 & \text{falls die Aussage A falsch ist}\,. \end{cases}$$

Wenn etwa $S_0 = 100$ ist, wären typische Werte für K und B etwa $K = 100$ und $B = 80$ oder für kurze Laufzeiten vielleicht $K = B = 90$. Solange dann der Underlyingpreis S_t grösser als 80 ist, ist das also ein ganz normaler Call, aber sobald der Underlyingpreis S_t für ein beliebiges $t\in[0,T]$ unter 80 fällt, ist die Option 'tot' und zahlt nichts mehr aus, auch wenn am Ende das S_T etwa wieder bei 120 steht.

Es ist sofort klar, dass hier Wahrscheinlichkeiten für das Maximum und das Minimum von S_t relevant sind, und, da wir hier ja das Black-Scholes Modell

$$S_t \;=\; S_0\, e^{\sigma x_t+(\mu-\sigma^2/2)t}$$

für den Preisprozess zu Grunde legen in dem ja die Brownsche Bewegung x_t drin vorkommt, sind hier also Wahrscheinlichkeiten für das Maximum und das Minimum einer Brownschen Bewegung relevant.

Probabilities involving the minimum or maximum of a Brownian motion show up in the valuation of barrier and lookback options. These are european options whose payoff H depends on S_T, the stock price at maturity T, and on $M_T := \max_{0\leq t\leq T} S_t$ or $m_T := \min_{0\leq t\leq T} S_t$,

$$H = H\big(S_T, \min_{0\leq t\leq T} S_t\big) \tag{1}$$

Thus these options depend on the particular path which leads to S_T, but only in a weak sense. For the Binomial model and the Black-Scholes model there are explicit pricing formulae. In this and the next chapter we derive these formulae for the Black-Scholes model. The corresponding results in the Binomial model can be found, for example, in *Föllmer, Schied: Stochastic Finance in Discrete Time.*

The basic pricing formula for path dependent or path independent options in the Black-Scholes model is

$$V_0 \;=\; e^{-rT}\mathsf{E}\Big[H\big(S_T, \min_{0\le t\le T} S_t\big)\Big] \tag{2}$$

where $\mathsf{E}[\,\cdot\,]$ denotes the expectation with respect to the standard Wiener measure and $\{S_t\}_{0\le t\le T}$ is the risk neutral price process in the Black-Scholes model. That is,

$$\frac{dS_t}{S_t} \;=\; r\,dt \;+\; \sigma\,dx_t \tag{3}$$

with x_t a Brownian motion or explicitely

$$S_t \;=\; S_0\, e^{\sigma\, x_t \,+\, (r-\sigma^2/2)t} \tag{4}$$

We can write

$$\min_{0\le t\le T} S_t \;=\; S_0\, e^{\sigma\, \min_{0\le t\le T}\left\{\, x_t \,+\, (\frac{r}{\sigma}-\frac{\sigma}{2})t\,\right\}} \tag{5}$$

Thus, we can consider H as a function of x_T and $\min_{0\le t\le T}\left\{x_t + (\frac{r}{\sigma}-\frac{\sigma}{2})t\right\}$. We first make a substitution of variables to eliminate the $(\frac{r}{\sigma}-\frac{\sigma}{2})t$ term in the minimum. There is the following

Lemma 3.1 (Girsanov): Let $dW(\{x_t\}_{0<t\le T})$ be the Wiener measure and make the substitution of variables $y_t = x_t + ct$. Then

$$dW(\{y_t\}_{0<t\le T}) \;=\; dW(\{x_t+ct\}_{0<t\le T}) \;=\; e^{-cx_T-\frac{c^2}{2}T}\, dW(\{x_t\}_{0<t\le T}) \tag{6}$$

Proof: Let $t_k = k\Delta t$ and $N_T = T/\Delta t$. Then

$$\begin{aligned}
dW(\{y_t\}_{0<t\le T}) \;&=\; \lim_{\Delta t\to 0}\prod_{k=1}^{N_T} p_{\Delta t}(y_{t_{k-1}}, y_{t_k})\, dy_{t_k} \\
&=\; \lim_{\Delta t\to 0}\prod_{k=1}^{N_T} \frac{1}{\sqrt{2\pi\Delta t}}\, e^{-\frac{(y_{t_k}-y_{t_{k-1}})^2}{2\Delta t}}\; dy_{t_k} \\
&=\; \lim_{\Delta t\to 0}\prod_{k=1}^{N_T} \frac{1}{\sqrt{2\pi\Delta t}}\, e^{-\frac{\left[x_{t_k}-x_{t_{k-1}}+c(t_k-t_{k-1})\right]^2}{2\Delta t}}\; dx_{t_k} \\
&=\; \lim_{\Delta t\to 0}\prod_{k=1}^{N_T} \frac{1}{\sqrt{2\pi\Delta t}}\, e^{-\frac{(x_{t_k}-x_{t_{k-1}})^2}{2\Delta t}}\; e^{-(x_{t_k}-x_{t_{k-1}})c-\frac{c^2}{2}\Delta t}\, dx_{t_k} \\
&=\; \lim_{\Delta t\to 0}\prod_{k=1}^{N_T} \frac{1}{\sqrt{2\pi\Delta t}}\, e^{-\frac{(x_{t_k}-x_{t_{k-1}})^2}{2\Delta t}}\; dx_{t_k}\; e^{-\sum_{k=1}^{N_T}(x_{t_k}-x_{t_{k-1}})c-\frac{c^2}{2}N_T\Delta t} \\
&=\; dW(\{x_t\}_{0<t\le T})\, e^{-(x_T-x_0)c-\frac{c^2}{2}T} \\
&=\; e^{-cx_T-\frac{c^2}{2}T}\, dW(\{x_t\}_{0<t\le T})
\end{aligned} \tag{7}$$

which proves the lemma. ■

Using the above lemma with $c = \frac{r}{\sigma} - \frac{\sigma}{2}$, the price V_0 in (2) can be written as

$$\begin{aligned} V_0 &= e^{-rT} \int H\left(S_0\, e^{\sigma(x_T+cT)}, S_0\, e^{\sigma \min_{0\le t\le T}\{x_t+ct\}}\right) dW(\{x_t\}_{0<t\le T}) \\ &= e^{-rT} \int H\left(S_0\, e^{\sigma y_T}, S_0\, e^{\sigma \min_{0\le t\le T}\{y_t\}}\right) e^{cx_T+\frac{c^2}{2}T} dW(\{y_t\}_{0<t\le T}) \\ &= e^{-rT} \int H\left(S_0\, e^{\sigma y_T}, S_0\, e^{\sigma \min_{0\le t\le T}\{y_t\}}\right) e^{cy_T-\frac{c^2}{2}T} dW(\{y_t\}_{0<t\le T}) \end{aligned} \tag{8}$$

Thus, we have to compute an expectation value which depends on

$$F(\{y_t\}) := y_T \tag{9}$$
$$G(\{y_t\}) := \min_{0\le t\le T} \{\, y_t \,\} \tag{10}$$

Die nächste Rechnung sind nur 5 Zeilen, und es wird eigentlich kaum was gerechnet, sondern nur ein bischen umgeschrieben, aber trotzdem ist das eine konzeptionell ziemlich wichtige Sache, weil der Erwartungswert bezüglich des Wiener-Masses, im Limes ein unendlich-dimensionales Integral, am Ende in ein 2-dimensionales Integral umgeschrieben wurde.

Die Integrale, die in dem Wiener-Mass ja implizit enthalten sind, wurden hier aber noch nicht wirklich berechnet, sondern sie wurden nur in die Funktion $\rho_{F,G}(a,b)$ in (13) und (14) weiter unten verschoben. Das heisst, das eigentliche Problem wird dann darin bestehen, diese Funktion $\rho_{F,G}(a,b)$ zu berechnen, und das passiert dann in dem finalen Theorem 3.5 in diesem Kapitel. Das $\chi(\cdots)$ im folgenden ist wieder die Indikator-Funktion.

Let I be the integrand in (8), $I = H(\cdots)\, e^{cy_T-\frac{c^2}{2}T} = I(F,G)$. For real valued F, let

$$1 = \sum_a \chi\Big(\; F \in [a, a+\Delta a) \;\Big) \tag{11}$$

be a partition of the real axis.

Ok, hier male ich normalerweise immer ein Bild an die Tafel, also das meint folgendes: die a's sind gegeben durch

$$a = a_i = i\,\Delta a$$

und Summe über a meint dann also

$$\sum_a \cdots = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \cdots$$

so dass, ganz egal welchen Wert etwa eine reelle Zahl F hat, dieses F dann in irgendeinem Intervall

$$\big[\, i\,\Delta a\;,\;(i+1)\,\Delta a \,\big]$$

drin sein muss. Genau für dieses Intervall wird dann das $\chi(\cdots)$ in (11) eine 1, und für alle anderen i's oder a's ist das eine 0. Dann können wir den Erwartungswert in (8), die y_t tun wir wieder in x_t umbenennen, also nur Notation, keine Substitution,

$$\mathsf{E}\Big[I\big(F(\{x_t\}),G(\{x_t\})\big)\Big] \;:=\; \int H\left(S_0\,e^{\sigma x_T},S_0\,e^{\sigma\min_{0\leq t\leq T}\{x_t\}}\right)e^{cx_T-\frac{c^2}{2}T}dW(\{x_t\}_{0<t\leq T}) \qquad (12)$$

und den Discount-Faktor e^{-rT} nehmen wir dann später wieder mit dazu, auch folgendermassen schreiben:

$$\begin{aligned}
&\mathsf{E}\Big[I\big(F(\{x_t\}),G(\{x_t\})\big)\Big]\\
&= \lim_{\substack{\Delta a\to 0\\ \Delta b\to 0}}\sum_{a,b}\mathsf{E}\Big[I\big(F(\{x_t\}),G(\{x_t\})\big)\chi\big(F\in[a,a+\Delta a)\big)\;\chi\big(G\in[b,b+\Delta b)\big)\;\Big]\\
&= \lim_{\substack{\Delta a\to 0\\ \Delta b\to 0}}\sum_{a,b}\mathsf{E}\Big[\;I\big(\,a\,,\,b\,\big)\quad\chi\big(F\in[a,a+\Delta a)\big)\;\chi\big(G\in[b,b+\Delta b)\big)\;\Big]\\
&= \lim_{\substack{\Delta a\to 0\\ \Delta b\to 0}}\sum_{a,b}I(a,b)\;\mathsf{E}\Big[\chi\big(F\in[a,a+\Delta a)\big)\;\chi\big(G\in[b,b+\Delta b)\big)\;\Big]\\
&= \lim_{\substack{\Delta a\to 0\\ \Delta b\to 0}}\sum_{a,b}I(a,b)\;\mathsf{Prob}\Big[\;F\in[a,a+\Delta a),\;G\in[b,b+\Delta b)\;\Big]\\
&= \int_{\mathbb{R}^2}I(a,b)\;\rho_{F,G}(a,b)\;da\,db \qquad (13)
\end{aligned}$$

where we introduced the joint distribution

$$\mathsf{Prob}\Big[\;F\in[a,a+da),\;G\in[b,b+db)\;\Big] \;=\; \rho_{F,G}(a,b)\;da\,db \qquad (14)$$

For $F(\{x_t\})=x_T$ and $G(\{x_t\})=\min_{0\leq t\leq T}\{\,x_t\,\}$, the joint distribution can be calculated explicitely. This is a consequence of the reflection principle which is formulated in the next lemma. For the statement, we need the definition of a stopping time.

Okay, mit Stop-Zeiten machen wir dann am Freitag weiter..