week3: Kapitel 2: Die Monte Carlo Methode, Teil 2: Monte Carlo und Option Pricing

Die standard Pricing-Formel für eine pfadunabhängige oder auch für eine pfadabhängige Option mit Auszahlung

$$H = H\big(\{S_t\}_{0\leq t\leq T}\big) \tag{1}$$

im Black-Scholes Modell lautet:

$$V_0 \;=\; e^{-rT}\,\mathsf{E}\big[\,H(\,\{S_t\}\,)\,\big] \tag{2}$$

Dabei ist S_t der risikoneutrale Preisprozess im Black-Scholes Modell, gegeben durch

$$S_t \;=\; S_0\,e^{\sigma x_t\,+\,(r-\sigma^2/2)t} \tag{3}$$

oder äquivalent, gegeben durch die SDE

$$dS_t/S_t \;=\; r\,dt \;+\; \sigma\,dx_t \tag{4}$$

In diskreter Zeit $t = t_k = k\Delta t$ ist Gleichung (4) gegeben durch

$$\begin{aligned} \tfrac{S_{t_k}-S_{t_{k-1}}}{S_{t_{k-1}}} \;&=\; r\,\Delta t \;+\; \sigma\sqrt{\Delta t}\,\phi_k \\ \Leftrightarrow \qquad S_{t_k} \;&=\; S_{t_{k-1}}\big(\,1 \;+\; r\,\Delta t \;+\; \sigma\sqrt{\Delta t}\,\phi_k\,\big) \end{aligned} \tag{5}$$

und der Erwartungswert in (2), das ist der Erwartungswert bezüglich des standard Wiener-Masses, liest sich dann folgendermassen. Ist $T = n\Delta t$, dann ist das $\mathsf{E}[\,\cdot\,]$ gegeben durch ein n-dimensionales Integral,

$$\begin{aligned} V_0 \;&=\; e^{-rT}\,\mathsf{E}\big[\,H(\,\{S_{t_k}\}_{k=0}^n\,)\,\big] \\ &=\; \int_{\mathbb{R}^n} H(\,\{S_{t_k}\}_{k=0}^n\,)\;\prod_{k=1}^n e^{-\frac{\phi_k^2}{2}}\;\tfrac{d\phi_k}{\sqrt{2\pi}} \end{aligned} \tag{6}$$

wobei gemäss Gleichung (5) die S_{t_k} Funktionen von den $\phi_1,\cdots,\phi_k$ sind,

$$S_{t_k} \;=\; S_{t_k}(\,\{\phi_\ell\}_{\ell=1}^k\,) \tag{7}$$

Also, wenn wir das jetzt mit der Notation aus dem `week2b.pdf` matchen möchten, dort hatten wir ja Integrale der Form

$$I \;=\; \int_{\mathbb{R}^n} F(\phi)\, p(\phi)\, d^n\phi \tag{8}$$

dann haben wir jetzt

$$p(\phi) \;=\; \prod_{k=1}^{n} e^{-\frac{\phi_k^2}{2}}\, \frac{d\phi_k}{\sqrt{2\pi}} \tag{9}$$

$$F(\phi) \;=\; H\big[\, \{S_{t_k}(\{\phi_\ell\}_{\ell=1}^k)\}_{k=0}^n \,\big] \tag{10}$$

und die Monte Carlo Evaluation geht dann also folgendermassen: Wir generieren N Zufallsvektoren

$$\begin{aligned} \phi^{(1)} &= \big(\, \phi_1^{(1)}\,,\, \cdots\,,\, \phi_n^{(1)} \,\big) \\ &\;\vdots \\ \phi^{(N)} &= \big(\, \phi_1^{(N)}\,,\, \cdots\,,\, \phi_n^{(N)} \,\big) \end{aligned} \tag{11}$$

und simulieren damit N risikoneutrale Black-Scholes Pfade gemäss

$$S_{t_k}^{(i)} \;=\; S_{t_{k-1}}^{(i)}\big(\, 1 \,+\, r\,\Delta t \,+\, \sigma\sqrt{\Delta t}\, \phi_k^{(i)} \,\big) \tag{12}$$

mit $S_{t_0}^{(i)} = S_0 =$ aktueller Underlyingpreis. Den Optionspreis V_0 aus (2) können wir dann numerisch approximieren durch die Monte Carlo Summe

$$V_0 \;\approx\; e^{-rT} \;\times\; \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} H\Big[\, \big\{\, S_{t_k}\big(\{\phi_\ell^{(i)}\}_{\ell=1}^k\big) \,\big\}_{k=0}^n \,\Big] \tag{13}$$

oder etwas intuitiver geschrieben,

$$V_0 \;=\; e^{-rT} \;\times\; \mathsf{E}\big[\, H(\{S_t\}_{0\le t\le T}) \,\big] \tag{14}$$

mit

$$\mathsf{E}\big[\, H(\{S_t\}_{0\le t\le T}) \,\big] \;=\; \frac{1}{\text{number of paths}} \sum_{\text{paths}} H(\text{path}) \;\;+\;\; \text{error} \tag{15}$$

wobei der Monte Carlo Fehler von der Grössenordnung $1/\sqrt{N}$ ist,

$$\text{error} \;=\; O\big(\tfrac{1}{\sqrt{N}}\big) \tag{16}$$

Large Step Evaluation für pfadunabhängige Optionen

Wenn wir eine pfadunabhängige Option haben, hängt die Auszahlung nur von dem S_T ab,

$$H = H(S_T) \tag{17}$$

und der Optionspreis lässt sich schreiben als

$$\begin{aligned} V_0 &= e^{-rT}\,\mathsf{E}\big[\,H(S_T)\,\big] \\ &\overset{(3)}{=} e^{-rT}\,\mathsf{E}\Big[\,H\big(\,S_0\,e^{\sigma x_T + (r-\sigma^2/2)T}\,\big)\,\Big] \end{aligned} \tag{18}$$

Wir können das grundlegende Theorem 4.1 aus der FM1 zur Evaluation von Wiener-Erwartungswerten anwenden und bekommen

$$\begin{aligned} V_0 &= e^{-rT}\int_{\mathbb{R}} H\big(\,S_0\,e^{\sigma x_T + (r-\sigma^2/2)T}\,\big)\;p(0,x_T)\;dx_T \\ &= e^{-rT}\int_{\mathbb{R}} H\big(\,S_0\,e^{\sigma x_T + (r-\sigma^2/2)T}\,\big)\;e^{-\frac{x_T^2}{2T}}\;\frac{dx_T}{\sqrt{2\pi T}} \\ &= e^{-rT}\int_{\mathbb{R}} H\big(\,S_0\,e^{\sigma\sqrt{T}\,x + (r-\sigma^2/2)T}\,\big)\;e^{-\frac{x^2}{2}}\;\frac{dx}{\sqrt{2\pi}} \end{aligned} \tag{19}$$

wobei wir in der letzten Zeile die Substitution $x_T = \sqrt{T}x$ gemacht haben. Das ist jetzt also nur noch ein 1-dimensionales Integral und kein n-dimensionales wie in Gleichung (6). Deshalb brauchen wir zur Monte Carlo Evaluation jetzt nur $N \times 1$ anstatt $N \times n$ standard normalverteilte Zufallszahlen $x^{(1)}, \cdots, x^{(N)}$ und bekommen dann den 'large step' Monte Carlo Preis

$$V_0 \approx e^{-rT} \times \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} H\big(\,S_0\,e^{\sigma\sqrt{T}\,x^{(i)} + (r-\sigma^2/2)T}\,\big) \tag{20}$$

und diese Formel (20) soll also bei der Aufgabe (1b) vom 2. Übungsblatt angewendet werden. Die allgemeine Formel (15) werden wir dann brauchen, wenn wir etwa die analytischen Pricing-Formeln für Barrier-Optionen, die wir dann in den nächsten 2 Kapiteln herleiten werden, durch eine Monte Carlo Simulation verifizieren wollen. Die Evaluation gemäss (15), wo also pro Pfad $n = T/\Delta t$ Zufallszahlen generiert werden müssen anstatt nur einer einzigen, wird dann auch als 'small step' Evaluation bezeichnet.