Vorlesung 3: Auffrischung Finanzmathematik I, Teil3

Im Kapitel 5 der Finanzmathematik I Vorlesung hatten wir gesehen, dass sich das Black-Scholes Modell als ein Limes eines geeignet definierten Binomialmodells schreiben laesst. Da wir im Binomialmodell genau wissen, wie man Optionsauszahlungen replizieren kann, konnten wir dann auch sofort ein entsprechendes Resultat für das Black-Scholes Modell angeben. Zunächst hatten wir eine Formel für den Optionspreis angegeben. Und zwar genauer, für den Preis von pfadunabhängigen Optionen. Und dann, mit Hilfe der Ito-Formel, konnten wir zeigen, dass, wenn wir eine Handelsstrategie definieren durch $\delta_t := \partial V/\partial S$ mit $V = V(S,t)$ der Optionspreis zur Zeit t und $S = S_t$, der aktuelle Underlying-Preis, dass diese Handelsstrategie dann auch tatsächlich die Optionsauszahlung replizieren tut. Das hatten wir dann im achten Kapitel gemacht und wir schauen es uns auch nochmal auf dem neuen Übungsblatt 2 an.

Option Pricing and Payoff Replication in the Black-Scholes Model

The Black-Scholes model is given by the price dynamics

$$\frac{dS}{S} \;=\; \mu\, dt + \sigma\, dx_t \tag{1}$$

with a constant drift $\mu \in \mathbb{R}$ (for example, $\mu = 5\%$), a constant volatility $\sigma > 0$ (for example, $\sigma = 20\%$) and x_t being a Brownian motion. In discrete time, this reads

$$S_{t_k} \;=\; S_{t_{k-1}}\big(1 + \mu\,\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t}\,\phi_k\big) \tag{2}$$

with the ϕ_k being independent standard normal Gaussian random numbers. Recall that the dynamics of the Binomial model is given by

$$S_{t_k} \;=\; S_{t_{k-1}} \times \begin{cases} (1 + \mathrm{ret_{up}}) & \text{with some probability } \; p \\ (1 + \mathrm{ret_{down}}) & \text{with probability } \; 1 - p \end{cases} \tag{3}$$

We approximate (2) by the Binomial model

$$S_{t_k} \;=\; S_{t_{k-1}}\big(1 + \mu\,\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t}\,\varepsilon_k\big) \tag{4}$$

where the $\varepsilon_k \in \{+1, -1\}$ are independent random variables with (real world) probabilities

$$\mathsf{Prob}(\varepsilon_k = +1) \;=\; \mathsf{Prob}(\varepsilon_k = -1) \;=\; \frac{1}{2} \tag{5}$$

such that, as for the ϕ_k, we have $\mathsf{E}[\varepsilon_k] = 0$ and $\mathsf{V}[\varepsilon_k] = 1$. Observe that in this context we are not considering any options or replicating strategies. Thus, interest rates do not enter the stage here and the notion of risk neutral probabilities is not relevant at this place. Expectation values, which one could call real world expectation values in this context, with respect to the Binomial model (4,5) are given by ($t = N\Delta t$, $N = t/\Delta t$)

$$\mathsf{E}^{\mathrm{Bin}}\big[\,f(S_t)\,\big] \;=\; \sum_{k=0}^{N} f\big(S_0(1+\mu\Delta t+\sigma\sqrt{\Delta t})^k(1+\mu\Delta t-\sigma\sqrt{\Delta t})^{N-k}\big)\times \tfrac{1}{2^N}\tbinom{N}{k} \tag{6}$$

whereas expectation values with respect to the Black-Scholes model (1) are given by

$$\begin{aligned}\mathsf{E}^{\mathrm{BS}}\big[\,f(S_t)\,\big] &= \int f\big(S_0 e^{(\mu-\frac{\sigma^2}{2})t+\sigma x_t}\big)\,dW(\{x_t\}_{0<t\le T})\\ &= \int_{\mathbb{R}} f\big(S_0 e^{(\mu-\frac{\sigma^2}{2})t+\sigma x_t}\big)\,\tfrac{1}{\sqrt{2\pi t}}e^{-\frac{x_t^2}{2t}}\,dx_t\end{aligned} \tag{7}$$

There is the following

Theorem 5.1: In the continuous time limit $\Delta t\to 0$, the Binomial model (4,5) converges to the Black-Scholes model (1), for arbitrary f we have

$$\lim_{\Delta t\to 0}\mathsf{E}^{\mathrm{Bin}}\big[\,f(S_t)\,\big] \;=\; \mathsf{E}^{\mathrm{BS}}\big[\,f(S_t)\,\big] \tag{8}$$

Now that we are in a position to approximate the Black-Scholes model with a suitable Binomial model, we can consider option prices and replicating strategies. Consider first the case of a european option with payoff $H = H(S_T)$ which depends only on the stock price at maturity. According to Theorem 3.2, its theoretical fair value V_0 is given by ($t_N = T$, $t_0 = 0$)

$$V_0 \;=\; e^{-rT}\sum_{k=0}^{N} H\big(S_0(1+\mathrm{ret_{up}})^k(1+\mathrm{ret_{down}})^{N-k}\big)\times\tbinom{N}{k}p_{\text{risk neutral}}^k(1-p_{\text{risk neutral}})^{N-k} \tag{9}$$

with the risk neutral probabilities of Chapter 3,

$$p_{\text{risk neutral}} \;:=\; \frac{e^{r\Delta t}-1-\mathrm{ret_{down}}}{\mathrm{ret_{up}}-\mathrm{ret_{down}}} \tag{10}$$

and up- and down-returns given by (3,4),

$$\mathrm{ret_{up}} \;=\; \mu\Delta t+\sigma\sqrt{\Delta t} \tag{11}$$

$$\mathrm{ret_{down}} \;=\; \mu\Delta t-\sigma\sqrt{\Delta t} \tag{12}$$

Using $e^{r\Delta t} = 1 + r\Delta t + O\big((\Delta t)^2\big)$ and neglecting terms quadratic in Δt, we get

$$p_{\text{risk neutral}} \;=\; \frac{(r-\mu)\Delta t+\sigma\sqrt{\Delta t}}{2\sigma\sqrt{\Delta t}} \;=\; \frac{1+\frac{r-\mu}{\sigma}\sqrt{\Delta t}}{2} \tag{13}$$

To obtain the option price under the Black-Scholes model, we have to calculate the $\Delta t\to 0$ limit of (9). A naive guess could be that the risk neutral probabilities converge actually to 1/2 and then (9) actually coincides with the real world expectation value (6) and this expression converges to the real world Black-Scholes expectation value (7). If this would be true, it would be actually quite bad since in that case the option price would depend on the drift parameter μ and this parameter is basically not predictable. Knowing μ is basically equivalent to knowing whether a stock is going up or down, nobody knows that. Recall that the basic result of the very elementary example in chapter 0 was that you have to buy half a stock and then you are save, regardless whether the stock is going up or down.

Fortunately this is still true in the Black-Scholes model. The $\sqrt{\Delta t}$-term in the risk neutral probabilities is actually highly important and it has the effect that in the continuous time limit the drift parameter μ completely drops out of the pricing formula, it is simply substituted by the interest rate parameter r. There is the following

Theorem 5.2: Consider the Binomial model (4,5) which converges to the Black-Scholes model (1). Let $V_0^{\rm Bin}$ be the theoretical fair value of some european option $H = H(S_T)$ in the Binomial model. Then

$$\lim_{\Delta t \to 0} V_0^{\rm Bin} \;=\; V_0^{\rm BS} \tag{14}$$

where the theoretical fair value under the Black-Scholes model in given by

$$V_0^{\rm BS} \;=\; e^{-rT} \int_{\mathbb{R}} H\bigl(S_0 e^{(r-\frac{\sigma^2}{2})T+\sigma\sqrt{T}x}\bigr) e^{-\frac{x^2}{2}} \tfrac{dx}{\sqrt{2\pi}} \tag{15}$$

Wenn wir nicht den Zeit-0 Preis wissen wollen, sondern den Preis zu einer beliebigen Zeit $t \in [0,T]$, dann verallgemeinert sich (15) zu

$$V_t^{\rm BS} \;=\; V(S_t,t) \;=\; e^{-r(T-t)} \int_{\mathbb{R}} H\bigl(S_t\, e^{(r-\frac{\sigma^2}{2})(T-t)+\sigma\sqrt{T-t}x}\bigr) e^{-\frac{x^2}{2}} \tfrac{dx}{\sqrt{2\pi}} \tag{16}$$

In FM1, Kapitel 7 hatten wir dann gezeigt, dass der Preis $V(S,t) = V(S_t,t)$ auch durch das Lösen der Black-Scholes PDE gewonnen werden kann, die Funktion $V(S,t)$ erfüllt die partielle Differentialgleichung

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\sigma^2 S^2}{2}\frac{\partial^2 V}{S^2} + rS\frac{\partial V}{\partial S} - rV \;=\; 0 \tag{17}$$

mit der final condition

$$V(S,T) \;=\; H(S)\;.$$

Eine sehr wichtige Anwendung und Illustration der Ito-Formel besteht dann in der folgenden Aussage, die wir uns auf dem letzten Übungsblatt in der Finanzmathematik I angeschaut hatten:

Theorem: Die Funktion $V = V(S,t)$ genüge der Black-Scholes PDE (17) mit final condition $V(S,T) = H(S)$. Weiter sei ein stochastischer Preisprozess $\{S_t\}_{t\geq 0}$ gegeben durch das Black-Scholes Modell mit (real world) Drift μ,

$$\frac{dS_t}{S_t} \;=\; \mu\, dt + \sigma\, dx_t \tag{18}$$

Es sei $V_0 = V(S_0, 0)$ der Optionspreis von H, $\delta_t = \delta(S_t, t) := \frac{\partial V(S_t,t)}{\partial S_t}$ und $s_t := e^{-rt} S_t$ sei der diskontierte Preisprozess. Dann gilt

$$e^{-rT} H(S_T) \;=\; V_0 \,+\, \int_0^T \delta_t \, ds_t \tag{19}$$

Diese Gleichung besagt, dass im Black-Scholes Modell jede Optionsauszahlung durch eine geeignete Handelsstrategie repliziert werden kann.

Bemerkung: Beachten Sie, dass der Preisprozess $\{S_t\}_{0 \leq t \leq T}$, der auf der linken und der rechten Seite von (19) eingesetzt wird, der 'real world' Preisprozess ist mit einem beliebigen Drift-Parameter μ, das muss nicht der risikoneutrale Preisprozess mit Drift r sein. Der Optionspreis V_0 ist jedoch völlig unabhängig von μ und hängt nur von r ab (und natürlich noch von der Volatilität, Laufzeit,..).

Proof of Theorem: Let

$$v(S,t) \;:=\; e^{-rt}\, V(S,t)$$

Then, since $v_0 = V_0$,

$$\begin{aligned} e^{-rT} H(S_T) \,-\, V_0 \;&=\; v(S_T, T) \,-\, v(S_0, 0) \\ &=\; \int_0^T dv \end{aligned}$$

where

$$\begin{aligned} dv \;&=\; d\big(e^{-rt} V\big) \\ &=\; d(e^{-rt})\, V \,+\, e^{-rt}\, dV \,+\, d(e^{-rt})\, dV \\ &=\; -r\, e^{-rt}\, dt\, V \,+\, e^{-rt}\, dV \,+\, 0 \end{aligned}$$

Now,

$$dV \;=\; \frac{\partial V}{\partial S}\, dS_t \,+\, \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} (dS_t)^2 \,+\, \frac{\partial V}{\partial t}\, dt$$

Using

$$\delta_t \;=\; \frac{\partial V}{\partial S}(S_t, t)$$

and, recalling the calculation rules for Brownian motion $(dx_t)^2 = dt$ and $dx_t\, dt = (dt)^2 = 0$,

$$\begin{aligned} (dS_t)^2 \;&=\; (\mu\, S_t\, dt + \sigma\, S_t\, dx_t)^2 \\ &=\; 0 + 0 + \sigma^2\, S_t^2\, (dx_t)^2 \\ &=\; \sigma^2\, S_t^2\, dt \end{aligned}$$

we obtain

$$dV \;=\; \delta_t\, dS_t \,+\, \left\{ \frac{\sigma^2}{2} S_t^2 \, \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \,+\, \frac{\partial V}{\partial t} \right\} dt$$

We have to express dS_t through ds_t where $s_t = e^{-rt}\, S_t$. We have

$$\begin{aligned} ds_t &= d(e^{-rt} S_t) \\ &= -r\, e^{-rt}\, dt\, S_t \,+\, e^{-rt}\, dS_t \end{aligned}$$

or

$$e^{-rt}\, dS_t \;=\; ds_t \,+\, r\, e^{-rt}\, dt\, S_t$$

which gives

$$\begin{aligned} e^{-rt}\, dV &= \delta_t\, e^{-rt}\, dS_t \,+\, e^{-rt}\Big\{ \frac{\sigma^2}{2} S_t^2\, \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \,+\, \frac{\partial V}{\partial t} \Big\}\, dt \\ &= \delta_t\, \big[ds_t \,+\, r\, e^{-rt}\, dt\, S_t \big] \,+\, e^{-rt}\Big\{ \frac{\sigma^2}{2} S_t^2\, \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \,+\, \frac{\partial V}{\partial t} \Big\}\, dt \\ &= \delta_t\, ds_t \,+\, r S_t \frac{\partial V}{\partial S}\, dt \,+\, e^{-rt}\Big\{ \frac{\sigma^2}{2} S_t^2\, \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \,+\, \frac{\partial V}{\partial t} \Big\}\, dt \end{aligned}$$

Thus,

$$\begin{aligned} dv &= -r\, e^{-rt}\, dt\, V \,+\, e^{-rt}\, dV \\ &= -r\, e^{-rt}\, dt\, V \,+\, \delta_t\, ds_t \,+\, r S_t \frac{\partial V}{\partial S}\, dt \,+\, e^{-rt}\Big\{ \frac{\sigma^2}{2} S_t^2\, \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \,+\, \frac{\partial V}{\partial t} \Big\}\, dt \\ &= \delta_t\, ds_t \,+\, e^{-rt}\Big\{ \frac{\sigma^2}{2} S_t^2\, \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \,+\, r S_t \frac{\partial V}{\partial S} \,+\, \frac{\partial V}{\partial t} \,-\, rV \Big\}\, dt \\ &= \delta_t\, ds_t \end{aligned}$$

where we used the Black-Scholes PDE in the last line. Thus,

$$\begin{aligned} e^{-rT} H(S_T) \,-\, V_0 &= v(S_T, T) \,-\, v(S_0, 0) \\ &= \int_0^T dv \\ &= \int_0^T \delta_t\, ds_t \end{aligned}$$

and the theorem is proven. ■

Im Fall Zinsen $r = 0$ wird der Beweis deutlich übersichtlicher und transparenter, das schauen wir uns auf dem neuen Übungsblatt in der 2. Aufgabe noch einmal an.