Hochschule RheinMain
Prof. Dr. D. Lehmann

Finanzmathematik II
SS 2022

week11b: Mean Reversion Prozesse: Ornstein-Uhlenbeck, Cox-Ingersoll-Ross und GARCH-Diffusion, Teil 3

Für den OU- und den GD-Prozess hatten wir in den week10a,b explizite Formeln herleiten können, also wir konnten die OU und die GD SDE explizit lösen. Für den CIR-Prozess ist keine explizite Darstellung bekannt. Nichtsdestotrotz ist es möglich, die Erwartungswerte und Varianzen der Prozesse in allen 3 Fällen explizit zu berechnen, das passiert auf dem 10. Übungsblatt. Schauen wir uns die Rechnungen dazu an:

1.Aufgabe: Der OU-Prozess ν_1, der CIR-Prozess ν_2 und der GARCH-Diffusion-Prozess ν_3 sind gegeben durch die stochastischen Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} d\nu_{1,t} &= \kappa_1(\bar\nu_1 - \nu_{1,t})\,dt \;+\; \beta_1\,dx_t \\ d\nu_{2,t} &= \kappa_2(\bar\nu_2 - \nu_{2,t})\,dt \;+\; \beta_2\sqrt{\nu_{2,t}}\,dx_t \\ d\nu_{3,t} &= \kappa_3(\bar\nu_3 - \nu_{3,t})\,dt \;+\; \beta_3\,\nu_{3,t}\,dx_t \end{aligned}$$

oder etwas kompakter

$$d\nu_t = \kappa(\bar\nu - \nu_t)\,dt \;+\; \beta\,\nu_t^\gamma\,dx_t \tag{1}$$

mit $\gamma \in \{0, 1/2, 1\}$. Es sei $E(t) := \mathsf{E}[\nu_t]$ der Erwartungswert von ν_t. Zeigen Sie:

a) $E(t)$ erfüllt die Differentialgleichung

$$E'(t) = \kappa\big(\bar\nu - E(t)\big)$$

b) Folgern Sie aus (a): Für den OU-, CIR- und GD-Prozess gilt:

$$E(t) = \bar\nu + (\nu_0 - \bar\nu)\,e^{-\kappa t}\,. \tag{2}$$

Lösung: In diskreter Zeit $t = t_k = k\Delta t$ ist die Brownsche Bewegung gegeben durch

$$x_{t_k} = \sqrt{\Delta t}\,\textstyle\sum_{j=1}^k \phi_j$$

mit standard-normalverteilten ϕ_j's, so dass das dx_t gegeben ist durch

$$dx_{t_k} := x_{t_k} - x_{t_{k-1}} = \sqrt{\Delta t}\,\phi_k$$

Die SDE (1) ist dann äquivalent zu der folgenden stochastischen Rekursion:

$$\nu_{t_k} \;=\; \nu_{t_{k-1}} \;+\; \kappa(\bar\nu - \nu_{t_{k-1}})\,\Delta t \;+\; \beta\,\nu^\gamma_{t_{k-1}}\sqrt{\Delta t}\,\phi_k$$

Die Abhängigkeit der ν's von den ϕ's sieht also so aus:

$$\begin{aligned}\nu_{t_k} &= \nu_{t_k}(\phi_1,\cdots,\phi_{k-1},\phi_k)\\ \nu_{t_{k-1}} &= \nu_{t_{k-1}}(\phi_1,\cdots,\phi_{k-1})\end{aligned}$$

Damit bekommen wir

$$\begin{aligned}\mathsf{E}\big[\,\beta\,\nu^\gamma_{t_{k-1}}\sqrt{\Delta t}\,\phi_k\,\big] &= \beta\sqrt{\Delta t}\;\mathsf{E}\Big[\,\nu^\gamma_{t_{k-1}}(\phi_1,\cdots,\phi_{k-1})\,\phi_k\,\Big]\\ &= \beta\sqrt{\Delta t}\;\mathsf{E}\Big[\,\nu^\gamma_{t_{k-1}}(\phi_1,\cdots,\phi_{k-1})\,\Big] \times \underbrace{\mathsf{E}[\,\phi_k\,]}_{=0}\\ &= 0\end{aligned}$$

Das ist eine allgemeine Sache bei stochastischen DGLs, der Erwartungswert vom diffusiven Teil verschwindet. Wenn wir also den Erwartungswert von Gleichung (1) nehmen, bekommen wir

$$\begin{aligned}\mathsf{E}[\,d\nu_t\,] &= \kappa(\bar\nu - \mathsf{E}[\,\nu_t\,])\,dt \;+\; \beta\,\mathsf{E}\big[\,\nu^\gamma_t\,dx_t\,\big]\\ &= \kappa(\bar\nu - \mathsf{E}[\,\nu_t\,])\,dt \;+\; 0 \qquad (3)\end{aligned}$$

Nun ist, wieder in diskreter Zeit $t = t_k = k\Delta t$,

$$\mathsf{E}[\,d\nu_{t_k}\,] \;=\; \mathsf{E}\big[\,\nu_{t_k} \;-\; \nu_{t_{k-1}}\,\big] \;=\; \mathsf{E}[\,\nu_{t_k}\,] \;-\; \mathsf{E}[\,\nu_{t_{k-1}}\,]$$

Also folgt aus (3)

$$\begin{aligned}\mathsf{E}[\,d\nu_{t_k}\,] \;=\; \mathsf{E}[\,\nu_{t_k}\,] - \mathsf{E}[\,\nu_{t_{k-1}}\,] &= \kappa\big(\bar\nu - \mathsf{E}[\,\nu_{t_{k-1}}\,]\big)\,\Delta t\\ \Leftrightarrow \qquad \frac{\mathsf{E}[\,\nu_{t_k}\,] - \mathsf{E}[\,\nu_{t_{k-1}}\,]}{\Delta t} &= \kappa\big(\bar\nu - \mathsf{E}[\,\nu_{t_{k-1}}\,]\big)\end{aligned}$$

und im Limes $\Delta t \to 0$

$$\frac{d}{dt}\mathsf{E}[\,\nu_t\,] \;=\; \kappa\big(\bar\nu - \mathsf{E}[\,\nu_t\,]\big)$$

oder

$$\frac{d}{dt}\mathsf{E}[\,\nu_t\,] \;+\; \kappa\,\mathsf{E}[\,\nu_t\,] \;=\; \kappa\bar\nu$$

und diese DGL wird gelöst von

$$\mathsf{E}[\,\nu_t\,] \;=\; \bar\nu + (\nu_0 - \bar\nu)\,e^{-\kappa t} \qquad \blacksquare$$

2.Aufgabe: Für $\gamma \in \{0, 1/2, 1\}$ sei ν_t wie in Aufgabe 1 gegeben durch die Gleichung (1),

$$d\nu_t \;=\; \kappa(\bar\nu - \nu_t)\,dt \;+\; \beta\,\nu^\gamma_t\,dx_t$$

und $E(t) = \mathsf{E}[\nu_t]$ sei der Erwartungswert von ν_t gegeben durch die Formel (2) aus Aufgabe 1. Definieren wir

$$F(t) \;:=\; \mathsf{E}[\,\nu_t^2\,]\,,$$

dann ist die Varianz von ν_t gegeben durch

$$\mathsf{V}[\nu_t] \;=\; F(t) - E(t)^2\,.$$

a) Zeigen Sie, dass ν_t^2 folgende SDE erfüllt:

$$d(\nu_t^2) \;=\; \big[2\kappa(\bar\nu\,\nu_t - \nu_t^2) + \beta^2\nu_t^{2\gamma}\big]dt \;+\; 2\beta\,\nu_t^{\gamma+1}\,dx_t \tag{4}$$

b) Folgern Sie mit Hilfe von (4): $F(t)$ erfüllt die folgenden Differentialgleichungen:

$$\begin{aligned}
\gamma = 0: &\qquad & F'(t) + 2\kappa F(t) &= 2\kappa\bar\nu\,E(t) + \beta^2 \\
\gamma = 1/2: &\qquad & F'(t) + 2\kappa F(t) &= (2\kappa\bar\nu + \beta^2)\,E(t) \\
\gamma = 1: &\qquad & F'(t) + (2\kappa - \beta^2)\,F(t) &= 2\kappa\bar\nu\,E(t)
\end{aligned}$$

c) Die DGLs aus (b) lassen sich alle in geschlossener Form lösen. Wir betrachten lediglich den Limes $t \to \infty$. Zeigen Sie:

$$\gamma = 0: \qquad \lim_{t\to\infty} \mathsf{V}[\nu_t] \;=\; \frac{\beta^2}{2\kappa}$$

$$\gamma = 1/2: \qquad \lim_{t\to\infty} \mathsf{V}[\nu_t] \;=\; \frac{(\beta\sqrt{\bar\nu})^2}{2\kappa}$$

$$\gamma = 1: \qquad \lim_{t\to\infty} \mathsf{V}[\nu_t] \;=\; \begin{cases} \dfrac{(\beta\bar\nu)^2}{2\kappa - \beta^2} & \text{falls } \beta^2 < 2\kappa \\ +\infty & \text{falls } \beta^2 > 2\kappa \end{cases}$$

Lösung: **a)** Wir haben

$$\begin{aligned}
d(\nu_t^2) &= 2\nu_t\,d\nu_t \;+\; \frac{1}{2}\,2\,(d\nu_t)^2 \\
&= 2\nu_t\left[\,\kappa(\bar\nu - \nu_t)\,dt \;+\; \beta\,\nu_t^\gamma\,dx_t\,\right] \;+\; \left[\,\kappa(\bar\nu - \nu_t)\,dt \;+\; \beta\,\nu_t^\gamma\,dx_t\,\right]^2 \\
&= 2\nu_t\left[\,\kappa(\bar\nu - \nu_t)\,dt \;+\; \beta\,\nu_t^\gamma\,dx_t\,\right] \;+\; \left[\,\beta\,\nu_t^\gamma\,dx_t\,\right]^2 \\
&= 2\nu_t\left[\,\kappa(\bar\nu - \nu_t)\,dt \;+\; \beta\,\nu_t^\gamma\,dx_t\,\right] \;+\; \beta^2\,\nu_t^{2\gamma}\,dt \\
&= \big[2\kappa(\bar\nu\,\nu_t - \nu_t^2) + \beta^2\nu_t^{2\gamma}\big]dt \;+\; 2\beta\,\nu_t^{\gamma+1}\,dx_t
\end{aligned}$$

b) Wir nehmen den Erwartungswert von (4) und bekommen:

$$\mathsf{E}\big[\,d(\nu_t^2)\,\big] \;=\; \Big\{2\kappa\big(\,\bar\nu\,\mathsf{E}[\nu_t] \;-\; \mathsf{E}[\nu_t^2]\big) \;+\; \beta^2\,\mathsf{E}[\nu_t^{2\gamma}]\,\Big\}\,dt \;+\; 0$$

Wegen

$$\mathsf{E}\big[\,d(\nu_t^2)\,\big] \;=\; d\mathsf{E}[\nu_t^2]$$

und mit den Definitionen

$$\begin{aligned}
E_t \;&\equiv\; E(t) \;:=\; \mathsf{E}[\nu_t] \\
F_t \;&\equiv\; F(t) \;:=\; \mathsf{E}[\nu_t^2]
\end{aligned}$$

liefert das dann

$$\begin{aligned}
dF_t &= \Big\{2\kappa\big(\,\bar\nu\,\mathsf{E}[\nu_t] \;-\; \mathsf{E}[\nu_t^2]\big) \;+\; \beta^2\,\mathsf{E}[\nu_t^{2\gamma}]\,\Big\}\,dt \\
&= \Big\{2\kappa\big(\,\bar\nu\,E_t \;-\; F_t\,\big) \;+\; \beta^2\,\mathsf{E}[\nu_t^{2\gamma}]\,\Big\}\,dt
\end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned} F_t' \,+\, 2\kappa\, F_t &= 2\kappa\bar{\nu}\, E_t \,+\, \beta^2\, \mathsf{E}[\nu_t^{2\gamma}] \\ &= 2\kappa\bar{\nu}\, E_t \,+\, \beta^2 \begin{cases} \mathsf{E}[1] & \text{für } \gamma = 0 \\ \mathsf{E}[\nu_t] & \text{für } \gamma = 1/2 \\ \mathsf{E}[\nu_t^2] & \text{für } \gamma = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

und damit

$$F_t' \,+\, 2\kappa\, F_t = 2\kappa\bar{\nu}\, E_t \,+\, \beta^2 \begin{cases} 1 & \text{für } \gamma = 0 \\ E_t & \text{für } \gamma = 1/2 \\ F_t & \text{für } \gamma = 1 \end{cases}$$

c) Für den Limes $t \to \infty$ ersetzen wir das E_t durch

$$\lim_{t\to\infty} E_t = \lim_{t\to\infty} \left\{ \bar{\nu} + (\nu_0 - \bar{\nu})\, e^{-\kappa t} \right\} = \bar{\nu}$$

und bekommen die folgenden DGLs: Für $\gamma = 0$,

$$F_t' \,+\, 2\kappa\, F_t = 2\kappa\bar{\nu}^2 \,+\, \beta^2 \tag{5}$$

Für $\gamma = 1/2$,

$$F_t' \,+\, 2\kappa\, F_t = 2\kappa\bar{\nu}^2 \,+\, \beta^2\bar{\nu} \tag{6}$$

Und für $\gamma = 1$,

$$F_t' \,+\, 2\kappa\, F_t = 2\kappa\bar{\nu}^2 \,+\, \beta^2 F_t$$

oder

$$F_t' \,+\, (2\kappa - \beta^2)\, F_t = 2\kappa\bar{\nu}^2 \tag{7}$$

(5-7) sind lineare, inhomogene Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten. Die Lösung ist die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung plus eine partikuläre oder spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung. Die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung ist für $\gamma \in \{0, 1/2, 1\}$, in der Reihenfolge,

$$F_t = c_1\, e^{-2\kappa t} \tag{8}$$

$$F_t = c_2\, e^{-2\kappa t} \tag{9}$$

$$F_t = c_3\, e^{-(2\kappa-\beta^2)t} \tag{10}$$

Eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung ist, wieder für $\gamma \in \{0, 1/2, 1\}$, in der Reihenfolge,

$$F_t = \tfrac{2\kappa\bar{\nu}^2+\beta^2}{2\kappa} \tag{11}$$

$$F_t = \tfrac{2\kappa\bar{\nu}^2+\beta^2\bar{\nu}}{2\kappa} \tag{12}$$

$$F_t = \tfrac{2\kappa\bar{\nu}^2}{2\kappa-\beta^2} \tag{13}$$

Im Limes $t \to \infty$ geht der homogene Anteil nach 0, im Fall $\gamma = 1$ nur für $2\kappa > \beta^2$, so dass

$$
\begin{aligned}
\lim_{t\to\infty} \mathsf{V}[\nu_t] &= \lim_{t\to\infty} \left\{ F_t \,-\, E_t^2 \right\} \\
&= \lim_{t\to\infty} F_t \,-\, \bar{\nu}^2 \\
&= \begin{cases} \bar{\nu}^2 + \frac{\beta^2}{2\kappa} \\ \bar{\nu}^2 + \frac{\beta^2 \bar{\nu}}{2\kappa} \\ \frac{2\kappa\bar{\nu}^2}{2\kappa-\beta^2} \end{cases} \quad - \quad \bar{\nu}^2 \\
&= \begin{cases} \frac{\beta^2}{2\kappa} \\ \frac{\beta^2 \bar{\nu}}{2\kappa} \\ \frac{2\kappa\bar{\nu}^2 - \bar{\nu}^2(2\kappa-\beta^2)}{2\kappa-\beta^2} \end{cases} \\
&= \begin{cases} \frac{\beta^2}{2\kappa} & \text{für } \gamma = 0 \\ \frac{\beta^2 \bar{\nu}}{2\kappa} & \text{für } \gamma = 1/2 \\ \frac{\bar{\nu}^2\beta^2}{2\kappa-\beta^2} & \text{für } \gamma = 1 \end{cases} \qquad \blacksquare
\end{aligned}
$$