week10b: Mean Reversion Prozesse: Ornstein-Uhlenbeck, Cox-Ingersoll-Ross und GARCH-Diffusion, Teil 2

Letztes Mal hatten wir in dem Theorem 6.1 die folgende Aussage bewiesen: Die SDE für den Ornstein-Uhlenbeck Prozess

$$d\nu_t \;=\; \kappa(\bar\nu-\nu_t)\,dt \;+\; \beta\,dx_t \tag{1}$$

wird gelöst von

$$\nu_t \;=\; \bar\nu \,+\, (\nu_0-\bar\nu)e^{-\kappa t} \;+\; \beta\int_0^t e^{-\kappa(t-s)}\,dx_s \tag{2}$$

Daraus ergibt sich die folgende

Folgerung: Erwartungswert und Varianz eines Ornstein-Uhlenbeck Prozesses (2) sind gegeben durch

$$\mathsf{E}[\,\nu_t\,] \;=\; \bar\nu \,+\, (\nu_0-\bar\nu)e^{-\kappa t} \tag{3}$$

$$\mathsf{V}[\,\nu_t\,] \;=\; \tfrac{\beta^2}{2\kappa}\,(1-e^{-2\kappa t}) \tag{4}$$

Beweis: In diskreter Zeit $t=t_k=k\Delta t$ ist

$$\nu_t \;=\; \bar\nu \,+\, (\nu_0-\bar\nu)e^{-\kappa t_k} \;+\; \beta\sum_{j=1}^k e^{-\kappa(t_k-t_j)}\sqrt{\Delta t}\,\phi_j \tag{5}$$

Wegen

$$\mathsf{E}[\,\phi_j\,] \;=\; 0 \tag{6}$$

$$\mathsf{E}[\,\phi_j\phi_\ell\,] \;=\; \delta_{j,\ell} \tag{7}$$

haben wir dann

$$\begin{aligned}\mathsf{E}[\,\nu_t\,] \;&=\; \bar\nu \,+\, (\nu_0-\bar\nu)e^{-\kappa t} \;+\; \beta\sum_{j=1}^k e^{-\kappa(t_k-t_j)}\sqrt{\Delta t}\;\mathsf{E}[\,\phi_j\,]\\ &=\; \bar\nu \,+\, (\nu_0-\bar\nu)e^{-\kappa t} \;+\; 0\end{aligned} \tag{8}$$

und

$$\begin{aligned}\mathsf{V}[\,\nu_t\,] \;&=\; \mathsf{E}\big[\,(\,\nu_t-\mathsf{E}[\nu_t]\,)^2\,\big] \qquad (9)\\ &=\; \mathsf{E}\big[\,(\,\nu_t-\{\bar\nu\,+\,(\nu_0-\bar\nu)e^{-\kappa t}\}\,)^2\,\big]\\ &=\; \mathsf{E}\Big[\,\beta\sum_{j=1}^k e^{-\kappa(t_k-t_j)}\sqrt{\Delta t}\,\phi_j\;\beta\sum_{\ell=1}^k e^{-\kappa(t_k-t_\ell)}\sqrt{\Delta t}\,\phi_\ell\,\Big]\\ &=\; \beta^2\;\sum_{j,\ell=1}^k e^{-\kappa(2t_k-t_j-t_\ell)}\;\mathsf{E}\Big[\,\sqrt{\Delta t}\,\phi_j\;\sqrt{\Delta t}\,\phi_\ell\,\Big]\\ &=\; \beta^2\;\sum_{j=1}^k e^{-2\kappa(t_k-t_j)}\;\Delta t\\ &\overset{\Delta t\to 0}{=}\; \beta^2\;\int_0^t e^{-2\kappa(t-s)}\,ds \;=\; \tfrac{\beta^2}{2\kappa}\,(1-e^{-2\kappa t}) \qquad \blacksquare\end{aligned}$$

Bemerkung: Als Summe von normalverteilten Zufallszahlen ist ν_t wieder normalverteilt, es gilt

$$\mathsf{Prob}\big[\,\nu_t\,\in\,(\nu,\nu+d\nu)\,\big] \;=\; \frac{1}{\sqrt{2\pi\,\frac{\beta^2}{2\kappa}\,(1-e^{-2\kappa t})}}\;\exp\Big\{-\frac{\big(\,\nu\,-\,[\,\bar\nu\,+\,(\nu_0-\bar\nu)e^{-\kappa t}\,]\,\big)^2}{2\,\frac{\beta^2}{2\kappa}\,(1-e^{-2\kappa t})}\Big\}\,d\nu$$

GARCH-Diffusion:

Schauen wir uns jetzt den GARCH-Diffusion Prozess an, die SDE lautet:

$$d\nu_t \;=\; \kappa(\bar\nu-\nu_t)\,dt\;+\;\beta\,\nu_t\,dx_t \tag{10}$$

Betrachten wir zunächst die SDE für $\bar\nu = 0$,

$$d\tilde\nu_t \;=\; -\,\kappa\,\tilde\nu_t\,dt\;+\;\beta\,\tilde\nu_t\,dx_t \tag{11}$$

Das ist von der Form her wie das Black-Scholes Modell,

$$\frac{d\tilde\nu_t}{\tilde\nu_t} \;=\; -\,\kappa\,dt\;+\;\beta\,dx_t \tag{12}$$

und die Lösung ist also gegeben durch

$$\tilde\nu_t \;=\; \tilde\nu_0\;e^{\beta x_t\,-\,(\kappa+\beta^2/2)t} \tag{13}$$

Um eine Lösung von (10) zu erhalten, machen wir dann den Ansatz

$$\nu_t \;=\; a_t\,\tilde\nu_t \;=\; a_t\,\tilde\nu_0\;e^{\beta x_t\,-\,(\kappa+\beta^2/2)t} \tag{14}$$

und wir wollen annehmen, dass müssen wir dann hinterher noch checken, dass

$$da_t\,d\tilde\nu_t \;\stackrel{!}{=}\; 0 \tag{15}$$

Dann bekommen wir

$$\begin{aligned} d\nu_t \;&=\; da_t\,\tilde\nu_t\;+\;a_t\,d\tilde\nu_t \\ &=\; da_t\,\tilde\nu_t\;+\;a_t\,\big\{-\,\kappa\,\tilde\nu_t\,dt\;+\;\beta\,\tilde\nu_t\,dx_t\,\big\} \\ &=\; da_t\,\tilde\nu_t\;-\;\kappa\,\nu_t\,dt\;+\;\beta\,\nu_t\,dx_t \\ &\stackrel{!}{=}\; \kappa(\bar\nu-\nu_t)\,dt\;+\;\beta\,\nu_t\,dx_t \end{aligned} \tag{16}$$

und damit

$$da_t\,\tilde\nu_t \;=\; da_t\,\tilde\nu_0\;e^{\beta x_t\,-\,(\kappa+\beta^2/2)t} \;\stackrel{!}{=}\; \kappa\bar\nu\,dt \tag{17}$$

oder

$$da_t \;=\; \tfrac{\kappa\bar\nu}{\tilde\nu_0}\;e^{-\beta x_t\,+\,(\kappa+\beta^2/2)t}\,dt \tag{18}$$

Da gemäss (18) das da_t keinen dx_t-Anteil hat, sondern nur einen dt-Teil, ist die Gleichung (15) erfüllt. Wir integrieren (18) und bekommen

$$a_t - a_0 \;=\; \tfrac{\kappa\bar{\nu}}{\tilde{\nu}_0} \int_0^t e^{-\beta x_s + (\kappa+\beta^2/2)s}\, ds \tag{19}$$

und damit

$$\begin{aligned}
\nu_t \;&=\; a_t\, \tilde{\nu}_t \;=\; a_t\, \tilde{\nu}_0\, e^{\beta x_t - (\kappa+\beta^2/2)t} \\
&=\; \Big\{\, a_0 \,+\, \tfrac{\kappa\bar{\nu}}{\tilde{\nu}_0} \int_0^t e^{-\beta x_s + (\kappa+\beta^2/2)s}\, ds \,\Big\}\, \tilde{\nu}_0\, e^{\beta x_t - (\kappa+\beta^2/2)t} \\
&=\; \nu_0\, e^{\beta x_t - (\kappa+\beta^2/2)t} \;+\; \kappa\bar{\nu} \int_0^t e^{+\beta(x_t-x_s) - (\kappa+\beta^2/2)(t-s)}\, ds
\end{aligned} \tag{20}$$

Wir halten das Resultat in dem folgenden Theorem fest:

Theorem 6.2: Die SDE für den GARCH-Diffusion Prozess

$$d\nu_t \;=\; \kappa(\bar{\nu} - \nu_t)\, dt \;+\; \beta\, \nu_t\, dx_t \tag{21}$$

wird gelöst von

$$\nu_t \;=\; \nu_0\, e^{\beta x_t - (\kappa+\beta^2/2)t} \;+\; \kappa\bar{\nu} \int_0^t e^{+\beta(x_t-x_s) - (\kappa+\beta^2/2)(t-s)}\, ds \tag{22}$$

Bemerkungen:

1) Für positive $\nu_0, \bar{\nu}, \kappa$ ist der GD-Prozess offensichtlich immer positiv, für den OU-Prozess sind auch negative Werte möglich, der ist ja normalverteilt.

2) Der Erwartungswert für den GD-Prozess ist derselbe wie der für den OU-Prozess, wenn wir etwa die explizite Darstellung (22) benutzen, bekommen wir unter Berücksichtigung von

$$\mathsf{E}[\, e^{\sigma x_t - \sigma^2 t/2}\,] \;=\; 1 \tag{23}$$

das Resultat

$$\begin{aligned}
\mathsf{E}[\,\nu_t\,] \;&=\; \nu_0\, \mathsf{E}\Big[\, e^{\beta x_t - (\kappa+\beta^2/2)t} \,\Big] \;+\; \kappa\bar{\nu} \int_0^t \mathsf{E}\Big[\, e^{+\beta(x_t-x_s) - (\kappa+\beta^2/2)(t-s)} \,\Big]\, ds \\
&=\; \nu_0\, e^{-\kappa t} \;+\; \kappa\bar{\nu} \int_0^t e^{-\kappa(t-s)}\, ds \\
&=\; \nu_0\, e^{-\kappa t} \;+\; \bar{\nu}\,(1 - e^{-\kappa t})
\end{aligned} \tag{24}$$

und das ist identisch mit dem OU-Resultat (3).

Bevor wir nächste Woche noch ein paar analytische Rechnungen zum CIR-Prozess machen, können wir uns die erste Aufgabe vom neuen Übungsblatt 9 anschauen.