week10a: Mean Reversion Prozesse: Ornstein-Uhlenbeck, Cox-Ingersoll-Ross und GARCH-Diffusion

Mean reversion Prozesse werden in der Finanzmathematik zum Modellieren von stochastischen Zinsen oder stochastischen Volatilitäten benutzt. Wir wollen uns die folgenden 3 Prozesse anschauen:

Definition 6.1: Der Ornstein-Uhlenbeck-Prozess oder auch OU-Prozess ν_1, der Cox-Ingersoll-Ross-Prozess oder auch CIR-Prozess (oder auch square root oder SQR-Prozess in der ökonometrischen Literatur) ν_2 und der GARCH-Diffusion-Prozess oder auch GD-Prozess ν_3 sind gegeben durch die folgenden stochastischen Differentialgleichungen:

$$\begin{aligned} d\nu_{1,t} &= \kappa_1(\bar{\nu}_1 - \nu_{1,t})\,dt \;+\; \beta_1\,dx_t \\ d\nu_{2,t} &= \kappa_2(\bar{\nu}_2 - \nu_{2,t})\,dt \;+\; \beta_2\,\sqrt{\nu_{2,t}}\,dx_t \\ d\nu_{3,t} &= \kappa_3(\bar{\nu}_3 - \nu_{3,t})\,dt \;+\; \beta_3\,\nu_{3,t}\,dx_t \end{aligned} \tag{1}$$

mit Modell-Parametern $\kappa_i, \bar{\nu}_i$ und β_i und x_t eine Brownsche Bewegung.

In diskreter Zeit $t = t_k = k\Delta t$ ist die Brownsche Bewegung gegeben durch

$$x_{t_k} \;=\; \sqrt{\Delta t}\,\textstyle\sum_{j=1}^{k}\phi_j \tag{2}$$

mit standard-normalverteilten ϕ_j's, so dass das dx_t gegeben ist durch

$$dx_{t_k} \;:=\; x_{t_k} - x_{t_{k-1}} \;=\; \sqrt{\Delta t}\,\phi_k \tag{3}$$

Die SDEs (1) sind dann äquivalent zu den folgenden stochastischen Rekursionen:

$$\begin{aligned} \nu_{1,t_k} &= \nu_{1,t_{k-1}} \;+\; \kappa_1(\bar{\nu}_1 - \nu_{1,t_{k-1}})\,\Delta t \;+\; \beta_1\,\sqrt{\Delta t}\,\phi_k \\ \nu_{2,t_k} &= \nu_{2,t_{k-1}} \;+\; \kappa_2(\bar{\nu}_2 - \nu_{2,t_{k-1}})\,\Delta t \;+\; \beta_2\,\sqrt{\,\nu_{2,t_{k-1}}}\,\sqrt{\Delta t}\,\phi_k \\ \nu_{3,t_k} &= \nu_{3,t_{k-1}} \;+\; \kappa_3(\bar{\nu}_3 - \nu_{3,t_{k-1}})\,\Delta t \;+\; \beta_3\,\nu_{3,t_{k-1}}\,\sqrt{\Delta t}\,\phi_k \end{aligned} \tag{4}$$

Die SDEs für den OU- und den GD-Prozess können explizit gelöst werden. Schauen wir uns zunächst den OU-Prozess an:

Theorem 6.1: Die SDE für den Ornstein-Uhlenbeck Prozess

$$d\nu_t \;=\; \kappa(\bar{\nu} - \nu_t)\,dt \;+\; \beta\,dx_t \tag{5}$$

wird gelöst von

$$\nu_t \;=\; \bar\nu + (\nu_0 - \bar\nu)e^{-\kappa t} \;+\; \beta \int_0^t e^{-\kappa(t-s)}\, dx_s \tag{6}$$

Beweis: Nehmen wir an, die Formel (6) wäre nicht gegeben und wir müssten sie herleiten. Wir machen den Ansatz

$$\tilde\nu_t \;=\; a_t\,\nu_t \;+\; b_t \tag{7}$$

mit deterministischen Funktionen a_t und b_t (das heisst, da sollen keine Zufallszahlen drin sein) und versuchen, a_t und b_t so zu wählen, dass wir für $\tilde\nu_t$ eine einfachere Gleichung bekommen, die wir sofort lösen können. Wir haben

$$\begin{aligned} d\tilde\nu_t &= \dot a_t\,dt\,\nu_t \;+\; a_t\,d\nu_t \;+\; \dot b_t\,dt \\ &= \dot a_t\,dt\,\nu_t \;+\; a_t\left[\,\kappa(\bar\nu - \nu_t)\,dt \;+\; \beta\,dx_t\,\right] \;+\; \dot b_t\,dt \\ &= \left\{\,\dot a_t\,\nu_t \;+\; a_t\,\kappa(\bar\nu - \nu_t) \;+\; \dot b_t\,\right\}dt \;+\; \beta\,a_t\,dx_t \end{aligned} \tag{8}$$

Wir wollen a_t und b_t so wählen, dass der Drift-Anteil der obigen Gleichung, die geschweifte Klammer vor dem dt, verschwindet. Also:

$$(\dot a_t \;-\; \kappa a_t)\nu_t \;+\; \kappa\bar\nu\,a_t \;+\; \dot b_t \;\stackrel{!}{=}\; 0 \tag{9}$$

oder

$$\dot a_t \;-\; \kappa a_t \;=\; 0 \tag{10}$$

$$\kappa\bar\nu\,a_t \;+\; \dot b_t \;=\; 0 \tag{11}$$

Aus Gleichung (10) folgt:

$$a_t \;=\; a_0\,e^{+\kappa t} \tag{12}$$

so dass

$$\dot b_t \;=\; -\,\kappa\bar\nu a_0\,e^{+\kappa t} \tag{13}$$

oder

$$b_t \;=\; b_0 \;-\; \bar\nu a_0\,(e^{+\kappa t} - 1) \tag{14}$$

Mit dieser Wahl von a_t und b_t tut die geschweifte Klammer in (8) verschwinden und die SDE für $\tilde\nu_t$ lautet

$$\begin{aligned} d\tilde\nu_t &= \beta\,a_t\,dx_t \\ &= \beta\,a_0\,e^{+\kappa t}\,dx_t \end{aligned} \tag{15}$$

und wir bekommen

$$\tilde\nu_t \;-\; \tilde\nu_0 \;=\; \beta\,a_0 \int_0^t e^{+\kappa s}\,dx_s \tag{16}$$

Wegen

$$\tilde\nu_t \;=\; a_t\,\nu_t \;+\; b_t$$

ist dann

$$\begin{aligned}
\nu_t &= \tfrac{1}{a_t} \left(\tilde{\nu}_t \; - \; b_t \right) \\
&= \tfrac{1}{a_0}\, e^{-\kappa t} \left\{ \; \tilde{\nu}_0 \; + \; \beta\, a_0 \int_0^t e^{+\kappa s}\, dx_s \; - \; b_0 \; + \; \bar{\nu} a_0 \,(e^{+\kappa t} - 1) \; \right\} \\
&= \tfrac{1}{a_0}\, e^{-\kappa t} \left\{ \; \tilde{\nu}_0 \; + \; \beta\, a_0 \int_0^t e^{+\kappa s}\, dx_s \; - \; b_0 \; + \; \bar{\nu} a_0 \,(e^{+\kappa t} - 1) \; \right\} \\
&= \beta \int_0^t e^{-\kappa(t-s)}\, dx_s \; + \; \tfrac{1}{a_0}\, e^{-\kappa t} \left\{ \; \tilde{\nu}_0 \; - \; b_0 \; - \; \bar{\nu} a_0 \; \right\} \; + \; \bar{\nu} \qquad (17)
\end{aligned}$$

Insbesondere,

$$\nu_0 \;\; = \;\; \tfrac{1}{a_0} \left\{ \; \tilde{\nu}_0 \; - \; b_0 \; - \; \bar{\nu} a_0 \; \right\} \; + \; \bar{\nu} \qquad (18)$$

und damit

$$\nu_t \;\; = \;\; \beta \int_0^t e^{-\kappa(t-s)}\, dx_s \; + \; e^{-\kappa t}\, (\nu_0 - \bar{\nu}) \; + \; \bar{\nu} \qquad (19)$$

und das Theorem ist bewiesen. ■

Excel/VBA-Demo: Verifizieren Sie das Theorem 6.1 mit Hilfe einer geeigneten Excel/VBA-Simulation.